I. Définition de la transformation de Laplace

1. Définition d'une fonction causale

Définition : Une fonction f de la variable réelle t est dite causale si pour tout $t < 0$, on a $f(t) = 0$

Exemple : La fonction causale la plus largement utilisée est la fonction échelon unité, notée $\mathcal{U}$ et définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 & si\ t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 & si\ t \geq 0 \end{cases}$

Remarque : On rend une fonction causale en la multipliant par la fonction échelon unité.

2. Définition d'une intégrale généralisée

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a,+\infty[$ et $I(x) = \int_a^x f(t)dt$

Définition : Si la limite de $I(x)$ existe quand x tend vers $+\infty$, on dit que I est convergente et on pose : $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt$. Sinon on dit qu'elle est divergente.

Remarque : Si la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et si les deux intégrales $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ convergent, alors on peut écrire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^a f(t)dt + \int_a^{+\infty} f(t)dt$

3. Définition de la transformée de Laplace

Définition : La transformée de Laplace d'une fonction causale f continue par morceau est, si elle existe, la fonction F de la variable réelle ou complexe p définie par $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$

Notation et vocabulaire : Par abus de langage, on note $(\mathcal{L}_f)(p) = \mathcal{L}[f(t)]$

f est appelée originale de F

II. Transformées usuelles (formulaire)

Théorème : La transformée de Laplace de la fonction échelon unité f est $\mathrm{F(p)} = \frac{1}{\mathrm{p}}$.

Théorème : La transformée de Laplace de la fonction $f: t \mapsto e^{-at}\,\mathcal{U}(t)$ est $F(p) = \frac{1}{p+a}$.

Théorème : La transformée de Laplace de la fonction $f: t \mapsto \cos(\omega t) \times \mathcal{U}(t)$ est $F(p) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$.

Théorème : La transformée de Laplace de la fonction $f: t \mapsto \mathrm{sins}(\omega t) \times \mathcal{U}(t)$ est $F(p) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Théorème : La transformée de Laplace de la fonction $f: t \mapsto \mathrm{t^n} \times \mathcal{U}(t)$ est $F(p) = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

III. *Propriétés de la transformation de Laplace*

1. Linéarité

Théorème : La transformée de Laplace est linéaire : $\mathcal{L}(\lambda f+g)=\lambda\mathcal{L}(f)+\mathcal{L}(g)$.

2. Retard

Définition : Soit α un réel et f une fonction, on appelle retardée de α de la fonction f la fonction g définie par $g(t)=f(t-\alpha)$.

Théorème du retard : la transformé de Laplace G de g est donnée par : $G(p)=e^{-\alpha p}F(p)$.

3. Amorti

Définition : Soit λ un réel et f une fonction causale, on appelle amortie de f d'un facteur λ la fonction g définie par $g(t)=f(t)\times e^{-\lambda t}$.

Propriété : Alors la transformée de Laplace $G\ de\ g$ est donnée par $G(p)=F(p+\lambda)$.

4. Transformée de $f(\alpha t)\mathcal{U}(t)$

Propriété : Soit f une fonction causale, α un réel positif et h la fonction définie par $h(t)=f(\alpha t)$. Alors la transformée de Laplace H de h est donné par : $H(p)=\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$.

5. Transformée de la dérivée

Propriété : Transformée de Laplace d'une dérivée

Soit f une fonction causale, continue sur $[0,+\infty[$, dérivable par morceau sur]0,+∞[, dont la dérivée f' est continue par morceaux sur]0 ;+∞[. Si $F(p)=L[f(t)]$, alors $L[f'(t)]=pF(p)-f(0^+)$ où $f(0^+)=\lim_{t\to 0^+}f(t)$.

- Cette propriété s'avère très utile lors de la résolution d'équations différentielles.
- Il est possible, en s'assurant de leurs existences, de déterminer la transformée des dérivées successives de f . En effet : $L(ff'')=p\ \times L(ff')-ff'(0^+)=p\ ^2F\ \ (p\ )-ppff(0^+)-ff'(0^+)$

6. Valeur initiale et valeur finale

Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale.

Sous réserve de l'existence des limites considérées ainsi que l'existence de la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction $C^1 sur\ ]0,+\infty[$. **$p\in\mathbb{R}$? sinon ça n'a pas de sens**

$$\lim_{p\to+\infty}pF(p)=f(0^+)\ et\ \lim_{p\to 0}p\,F(p)=\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

7. Transformation réciproque (calcul d'originale)

Définition : Soit F la transformée de Laplace d'une fonction causale f, on appelle transformée de Laplace inverse ou original de F la fonction f. On note $f=\mathcal{L}^{-1}(F)$.

Propriété : L'original f d'une transformée F est unique.

Remarque : l'application $\mathcal{L}^{-1}$ qui à tout F associe f est appelée transformation de Laplace inverse