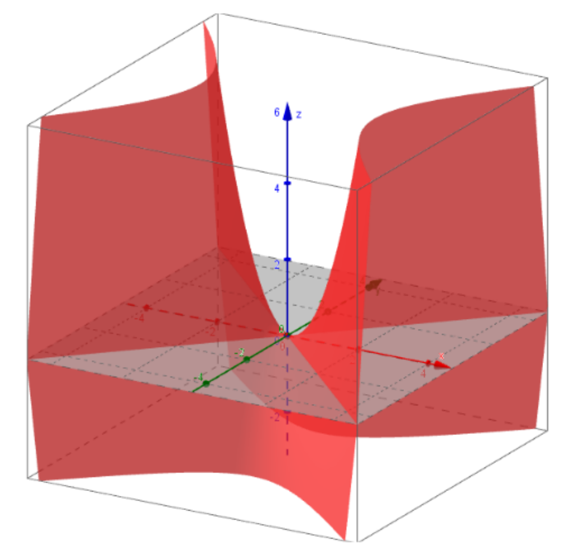
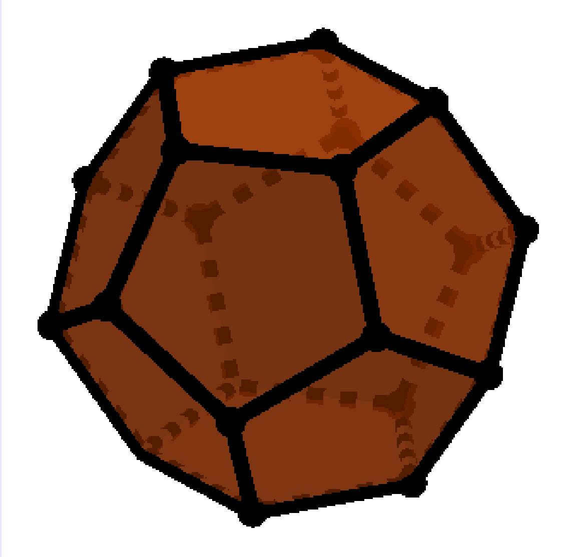
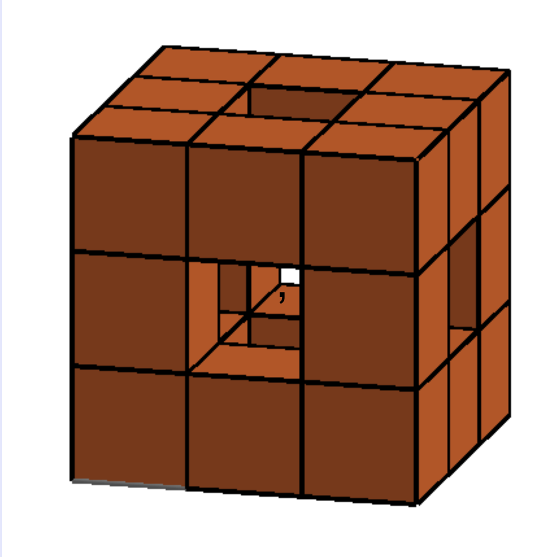
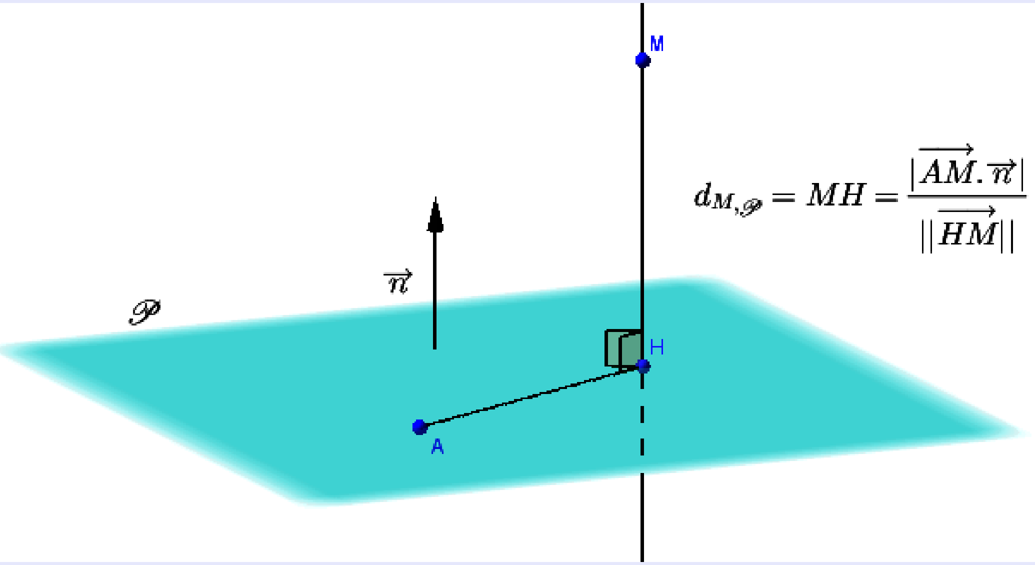
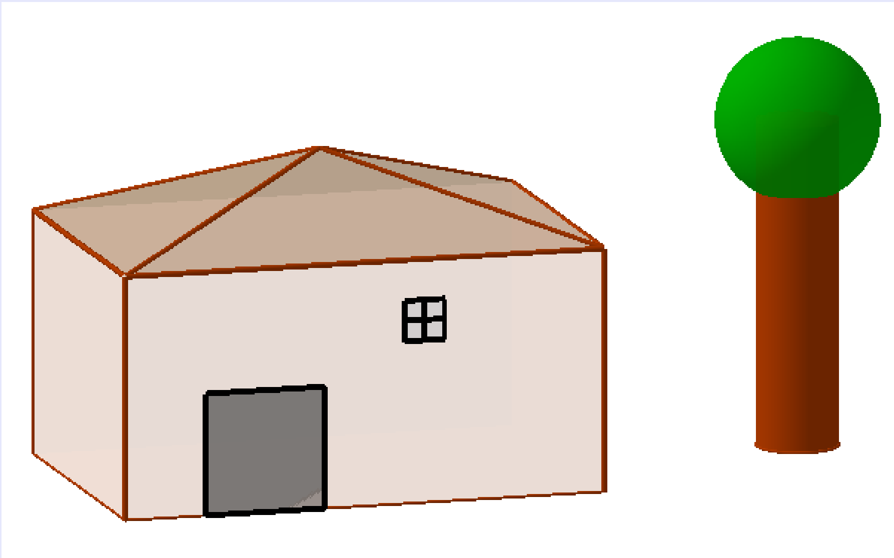
Créer des figures dynamiques en 3 dimensions avec GeoGebra 5









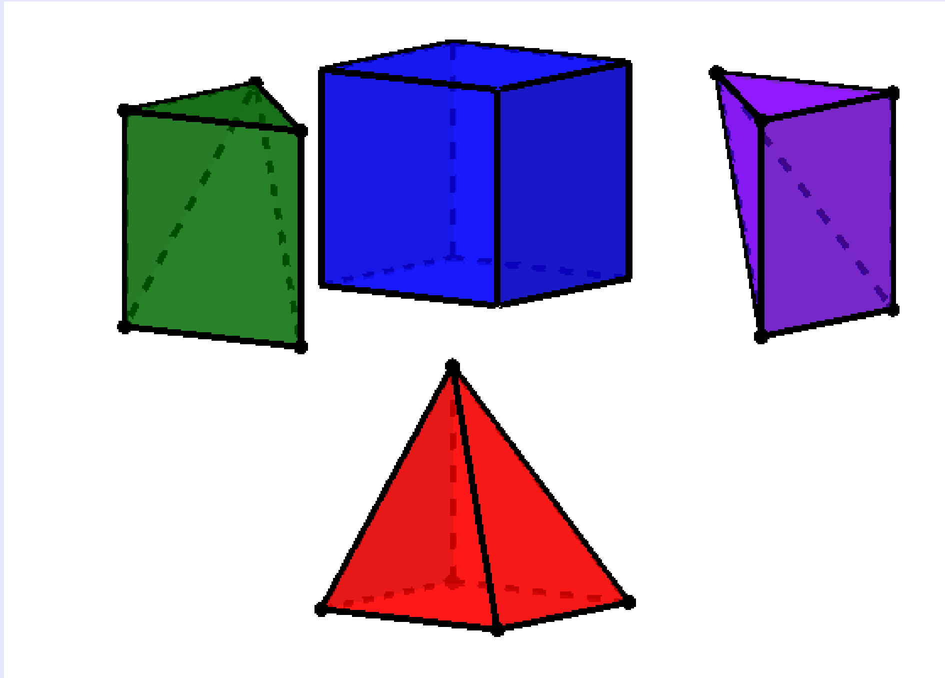


I. Pour débuter

I. 1. Téléchargement.

GeoGebra 5 est à télécharger à l'adresse

http://download.geogebra.org/installers/5.0/?C=M;O=D

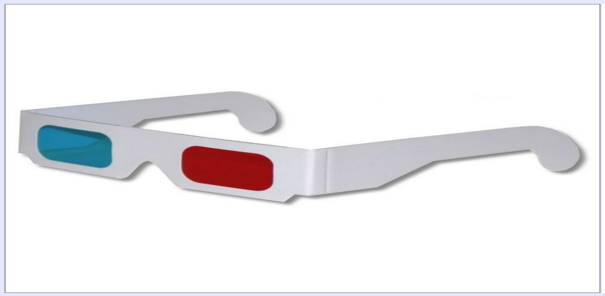


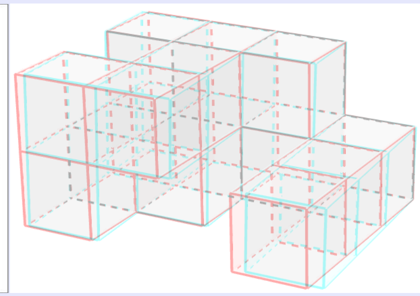
I. 2. Fichiers Gif

Un fichier animé par un curseur peut être enregistré sous format .gif.
L'amination ainsi crée peut être lue par exemple dans Libre Office.

I. 3. Vues 3D

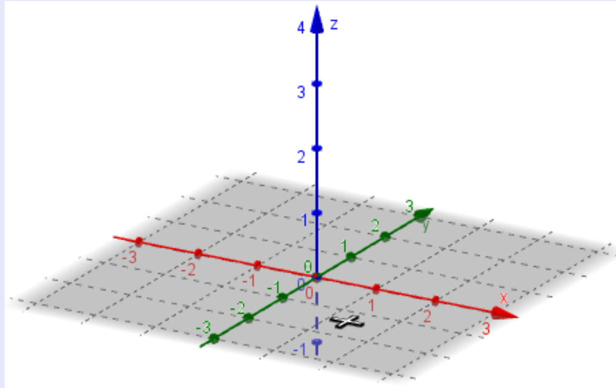
Il est possible d'avoir une vision 3D des constructions avec des lunettes "Rouge et Bleu".

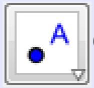


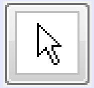


II. Comment faire.

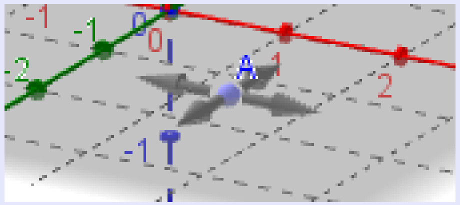
II. 1. Comment gérer un point de l'espace avec la souris.



- Pour créer un point on utilise l’icône  et on clique sur le plan grisé (d'équation $z=0$).

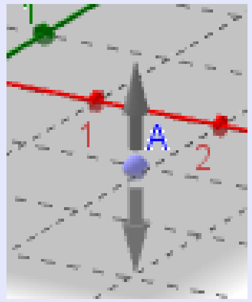
- Pour déplacer ce point suivant les axes (Ox) et (Oy), on utilise l'icône .

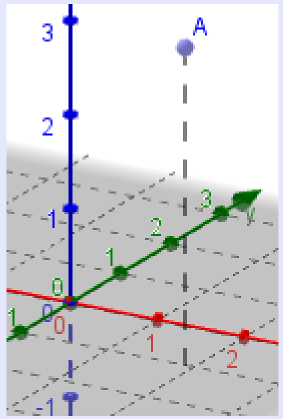
  Le curseur prend la forme d'une flèche à quatre branches et on peut le déplacer.



- Pour le déplacer suivant l'axe vertical il suffit de cliquer une nouvelle fois sur le point, le curseur change de forme.

  Lors du déplacement sa projection sur le plan (xOy) apparaît.

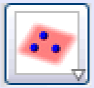




II. 2. Un plan.

Un plan peut être créé de trois façons différentes :

- En utilisant trois points déjà créés, à la souris ou avec le champ de saisie :

  Exemple : Entrer $A=(-3,-1,0)$ $B=(0,4,2)$ $C=(-2,1,1)$ dans le champ de saisie, puis utiliser l'icône .

- En utilisant son équation cartésienne de la forme $P: ax+by+cz+d=0$.

  Exemple : Entrer $P: x-y+z+2=0$ dans le champ de saisie.

- En utilisant son équation paramétrique : $\begin{cases} x(t,u)=at+bu+c \\ y(t,u)=a't+b'u+c' \\ z(t,u)=a''t+b''u+c'' \end{cases}$, avec $t, u \in \mathbb{R}$

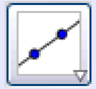
Exemple : Entrer " $Surface[t+u-2, 2t+u+1, t+1, t, -2, 2, u, -2, 2]$ " dans le champ de saisie.

(ce n'est pas un "vrai" plan, mais un rectangle...)

II. 3. Une droite.

Une droite peut être créée de deux façons différentes :

- En utilisant deux points déjà créés :

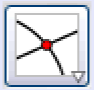
Exemple : Entrer $D=(3,1,0)$ $E=(4,0,1)$ dans le champ de saisie, puis utiliser l'icône 

- En utilisant son équation paramétrique de la forme $\begin{cases} x(t)=at+b \\ y(t)=a't+b' \\ z(t)=a''t+b'' \end{cases}$,avec $t\in\mathbb{R}$.

Exemple : Entrer "$Courbe[3+t,1-t,t,t,-4,4]$" dans le champ de saisie.

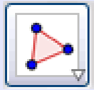
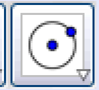
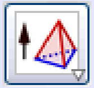
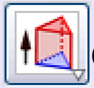
(qui crée un segment et non une droite)

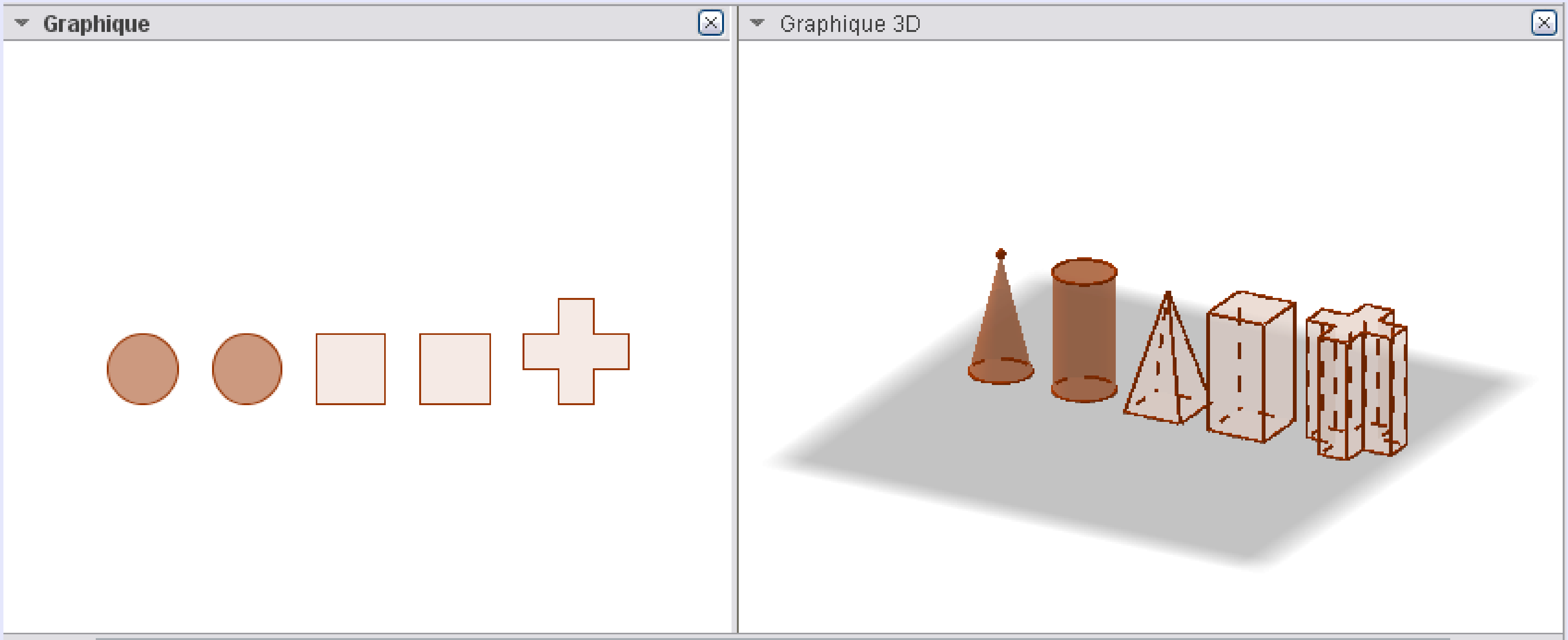
Remarques :

- En utilisant l'icône  on remarquera que le plan et la droite créés semblent orthogonaux.
- En utilisant l'icône  on trouvera le point d'intersection F entre le plan et la droite, de coordonnées $\left(\frac{5}{3},\frac{7}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

II. 4. Un solide sur le plan z=0.

Pour créer un cylindre, cône, parallélépipède ou prisme :

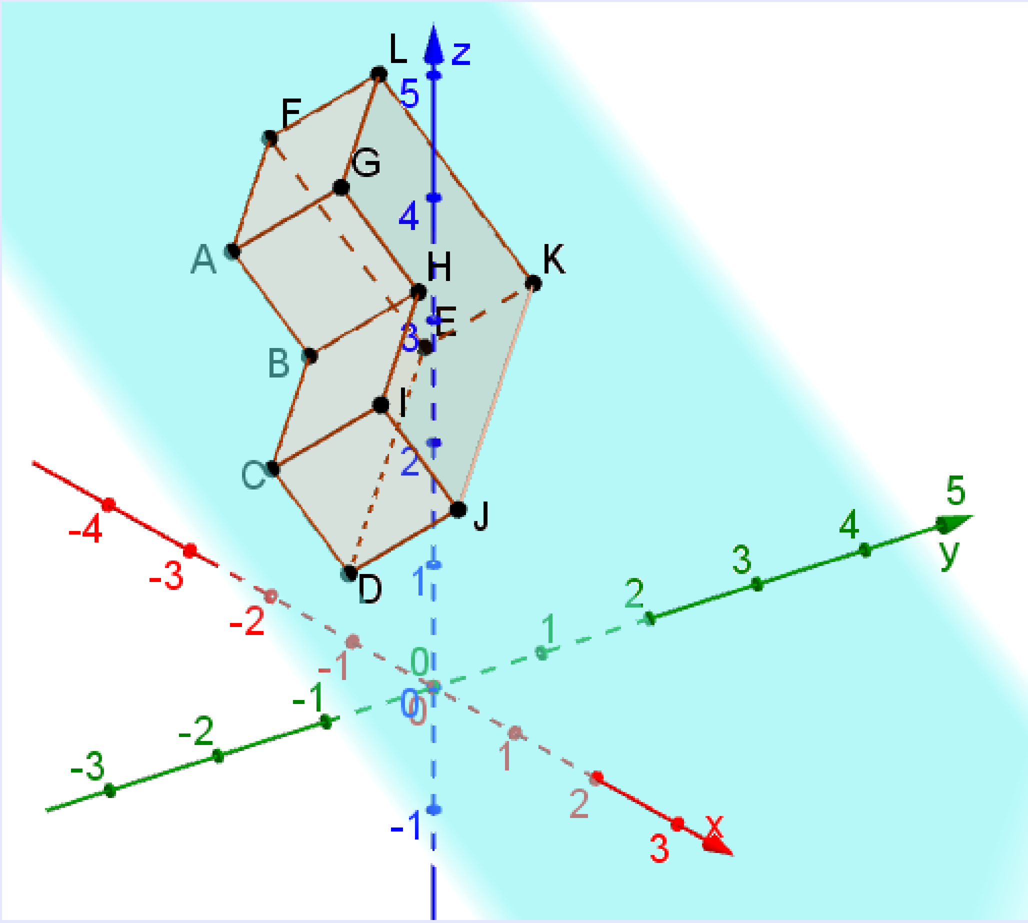
- on crée la base dans la fenêtre Graphique à l'aide des icônes  
- on utilise l'icône  ou  en spécifiant la hauteur du solide



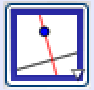
II. 5. Un solide sur un plan autre que z=0.

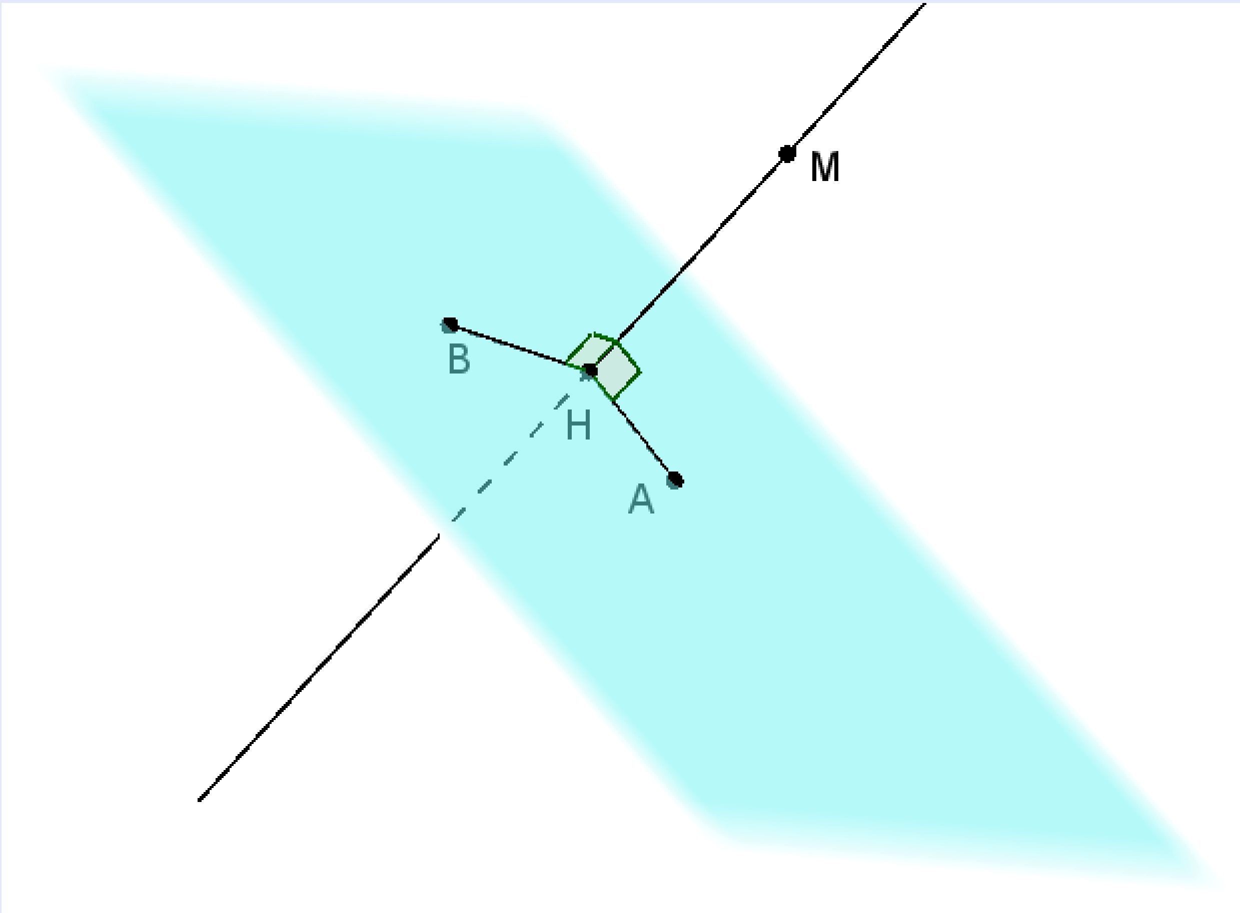
On souhaite dessiner un solide sur le plan $P: x+y+z=2$.

- Créer le plan en entrant $x+y+z=2$ dans la barre de saisie.
- Faire un clic droit sur ce plan, puis "Créer nouvelle vue 2D".
- Dans cette nouvelle fenêtre, créer le polygone servant de base, puis l'extruder en prisme (cf. II. 4.).

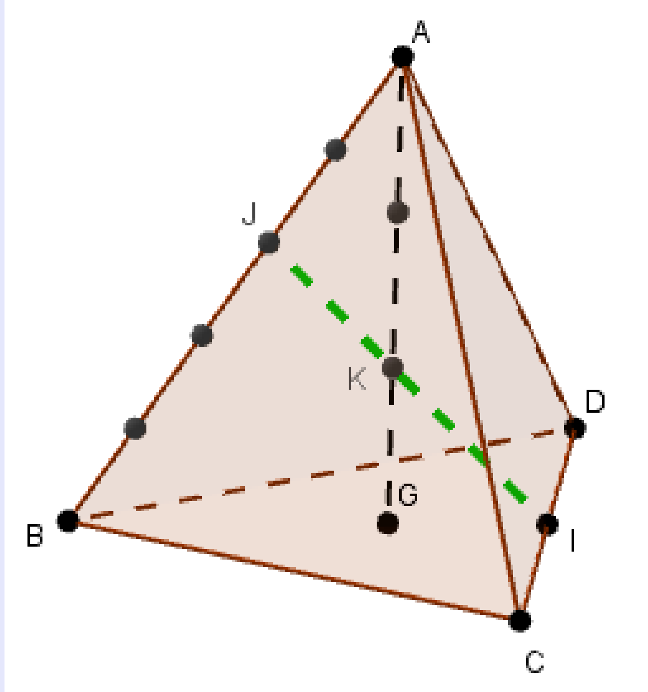


II. 6. Un projeté orthogonal sur un plan.

- Créer un plan P puis un point M n'étant par sur P.
- Créer la perpendiculaire à P passant par M avec l'icône  .



II. 7. Placer des points selon des subdivisions régulières.

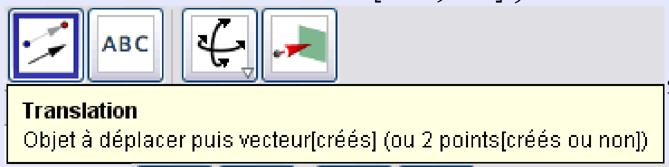


Exemple: ABCD est un tétraèdre, G est le centre de gravité de BCD, I le milieu de $[\mathrm{CD}]$. J et K sont définis par $\overrightarrow{\mathrm{AJ}}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AK}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$. Montrer que I, J et K sont alignés.

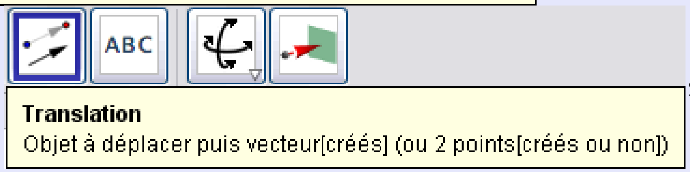
1ère méthode pour placer J et K : méthode barycentrique.
Entrer $\mathrm{J}=(3*\mathrm{A}+2*\mathrm{B})/5$ et $\mathrm{K}=(\mathrm{A}+2*\mathrm{G})/3$

2ème méthode : utiliser une translation.

- Entrer $u=2/5\times \text{Vecteur}[\mathrm{A},\mathrm{B}]$, $v=2/3\times \text{Vecteur}[\mathrm{A},\mathrm{G}]$

Puis cliquer sur 

, sur A et u (dans la fenêtre Algèbre).

De même, cliquer sur 

, sur A puis v.

- Ou plus simplement $\mathrm{J}=\mathrm{A}+2/5\ \text{Vecteur}[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ puis $\mathrm{K}=\mathrm{A}+2/3\ \text{Vecteur}[\mathrm{A},\mathrm{G}]$

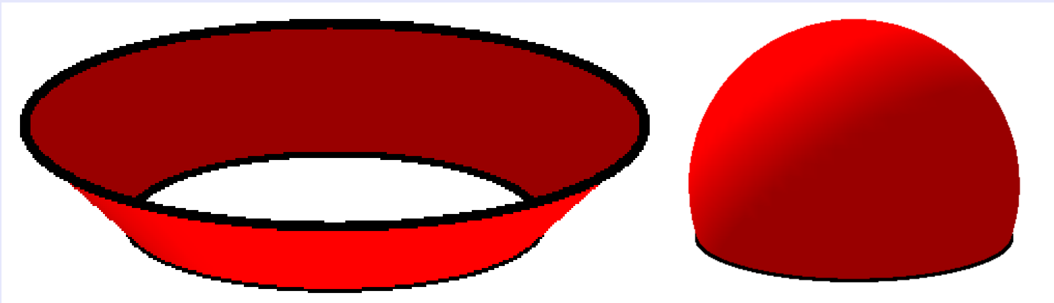
Pour placer toutes les subdivisions :
Entrer $\textit{Séquence}[\mathrm{A}+k\div 5\,\textit{Vecteur}[\mathrm{A},\mathrm{B}],k,1,4]$ dans la barre de saisie.

III. On ne peut pas faire

- L'enveloppe convexe de n points de l'espace

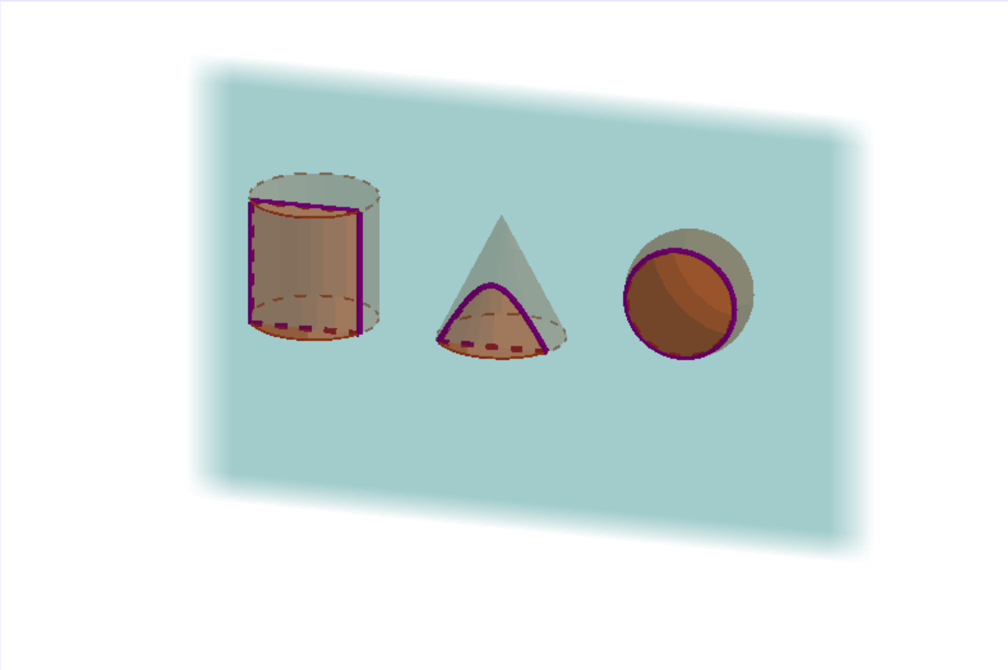
- Un solide quelconque obtenu en "soudant", "intersectant", ... des solides classiques

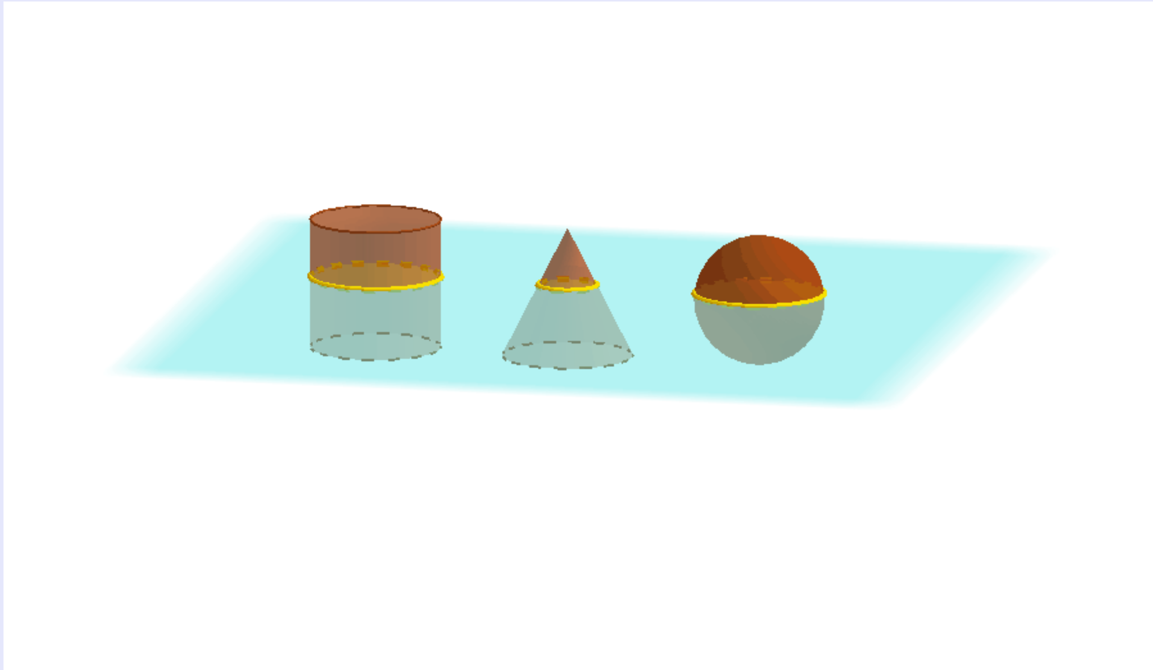
- Tronquer un solide de base (pour créer des "moules à muffin"...), du moins simplement. (cf IV. 9.)



IV Petites manipulations.

IV. 1. Visualiser des sections classiques.





- Pour créer des figures dynamiques, on peut commencer par créer des plans horizontaux, verticaux et obliques, pilotés par un curseur :

- Dans la fenêtre "Graphique", créer des curseurs "*horizontal*", "*vertical*" et "*oblique*".

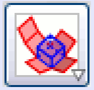
- Dans la fenêtre "*Graphique* 3D" entrer "$z=horizontal$", "$x=vertical$" et "$x+y=oblique$"

- Afficher ou cacher ces plans avec la fenêtre "Algèbre"

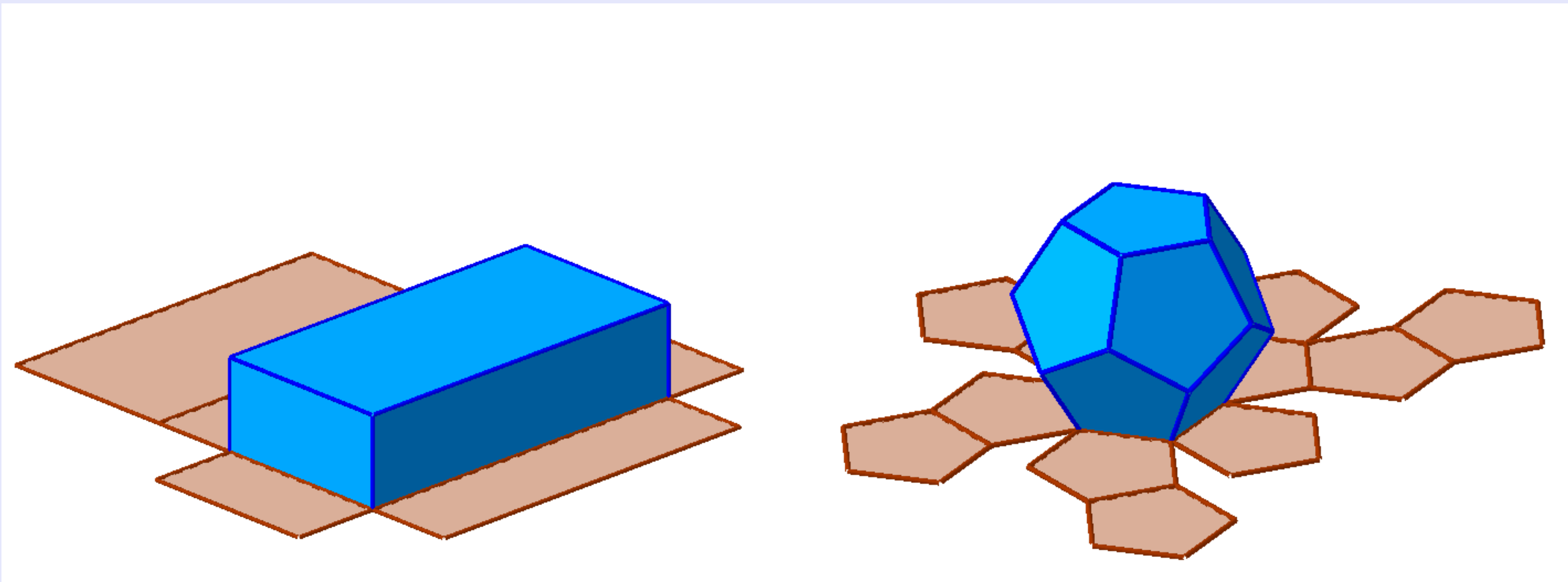
- Créer le solide à sectionner et observer les sections

IV. 2. Créer et visualiser des patrons de solides :

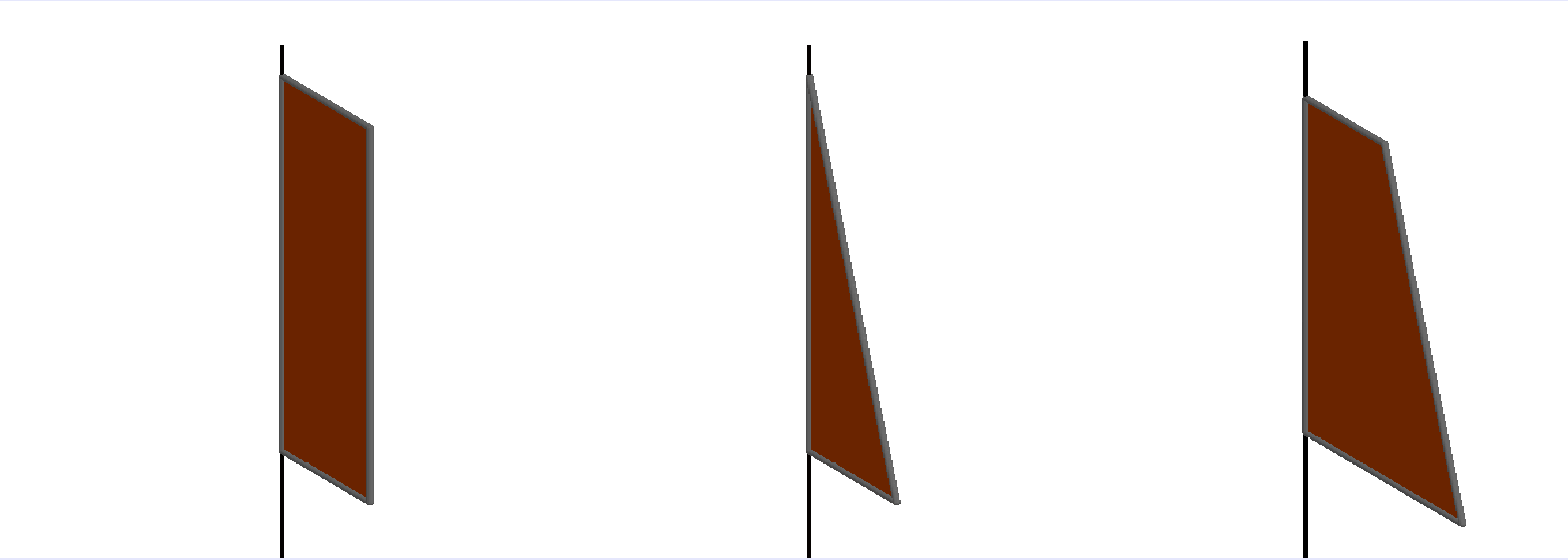
- Créer un solide,
  - soit en extrudant un polygone (cf II. 4.)
  - soit en utilisant les commandes *Tétraèdre*[A,B], *Cube*[A,B], …, A et B étant deux points créés.

- Obtenir le patron déplié à l'aide de l'icône .

- Un curseur a été crée dans la fenêtre algèbre ; il suffit de le faire afficher, et de modifier sa valeur pour que le patron s'anime.



IV. 3. Visualiser des solides de révolution :

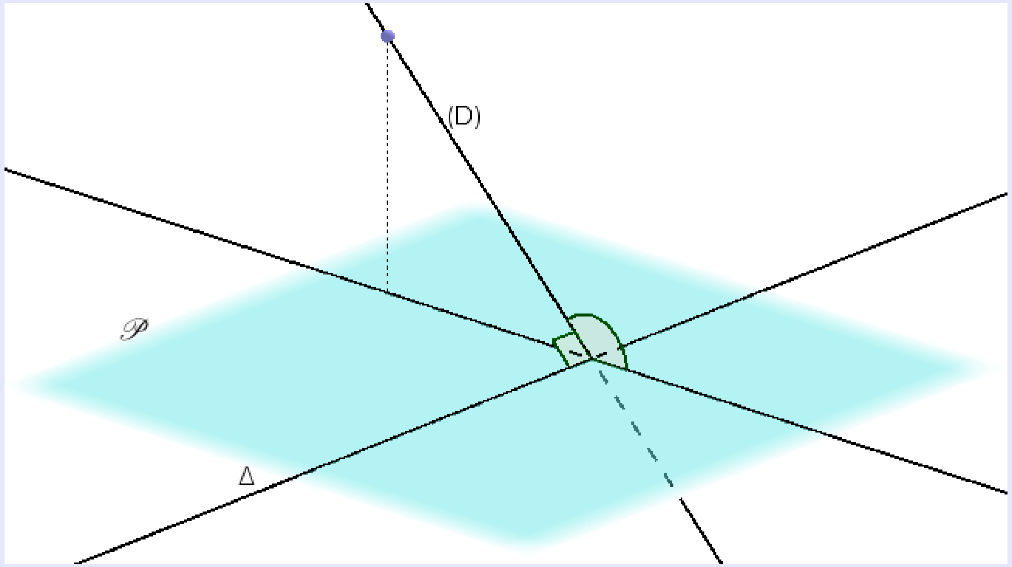


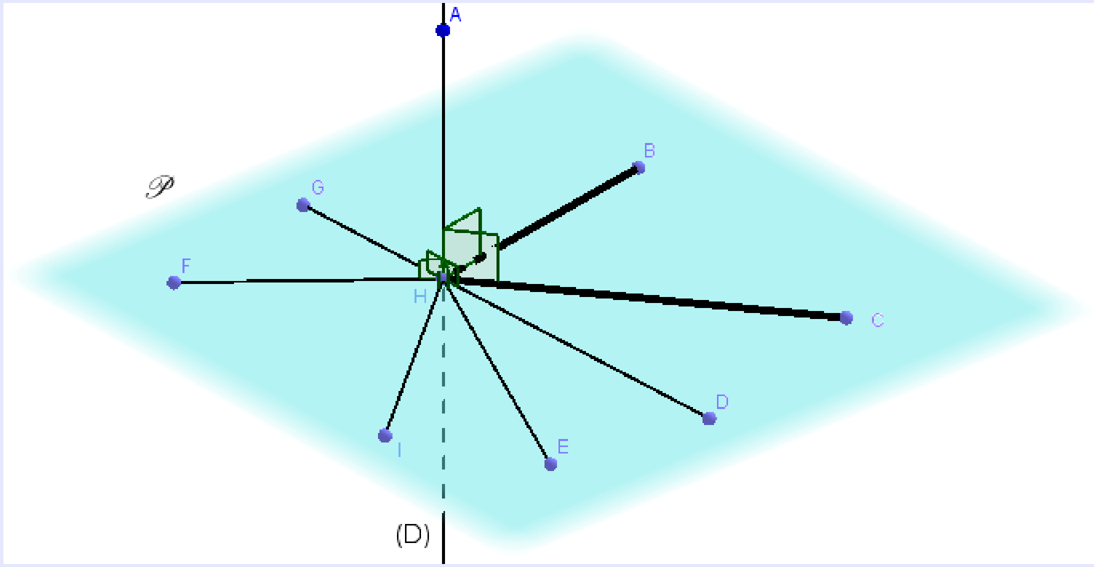
IV. 4. Droite orthogonale à un plan.

Utilités du logiciel :

- *Voir qu'il est possible d'avoir* $(\mathrm{D}) \perp \Delta$, Δ *étant une droite d'un plan* P *sans avoir* (D) *orthogonale à* P.

- *Voir que si* (D) *est orthogonale à deux droites non parallèles de* (P) *alors* (D) *est orthogonale à toute droite de* P.

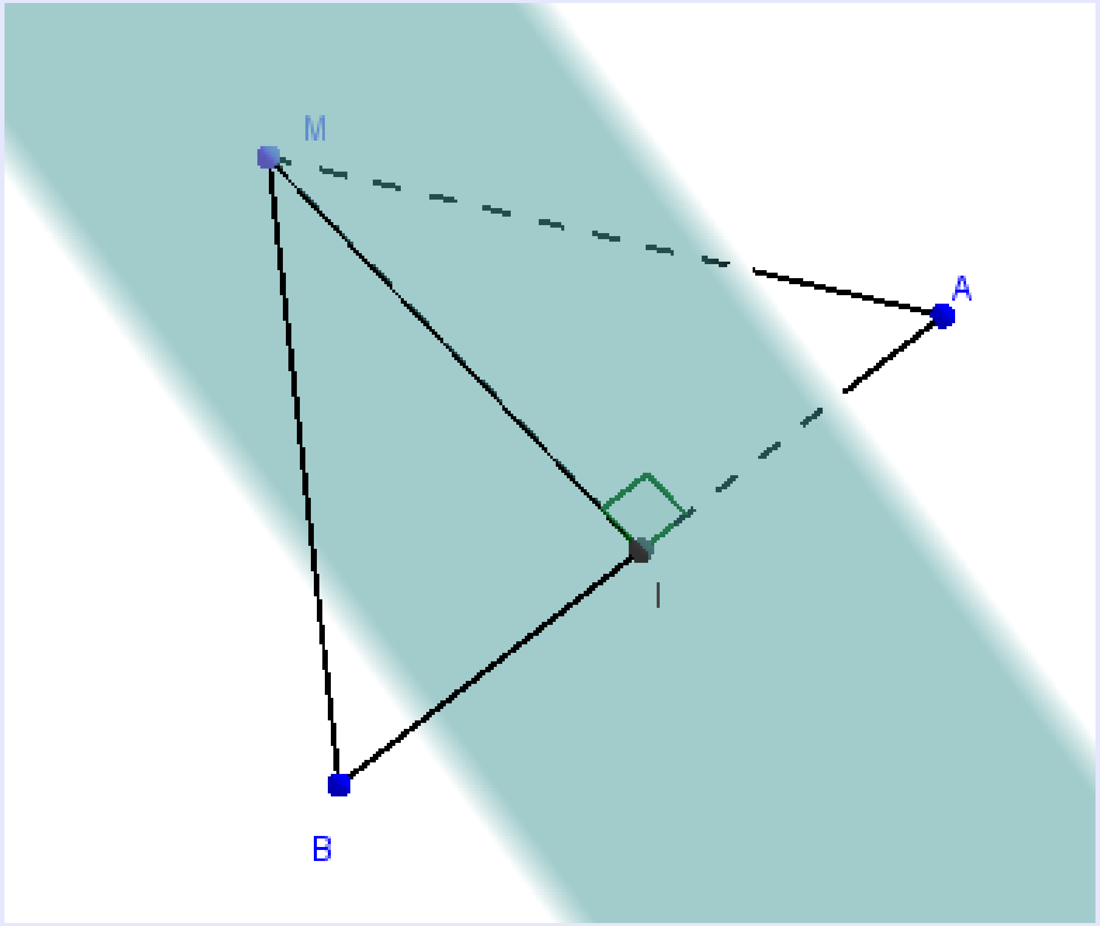




IV. 5. Plan médiateur

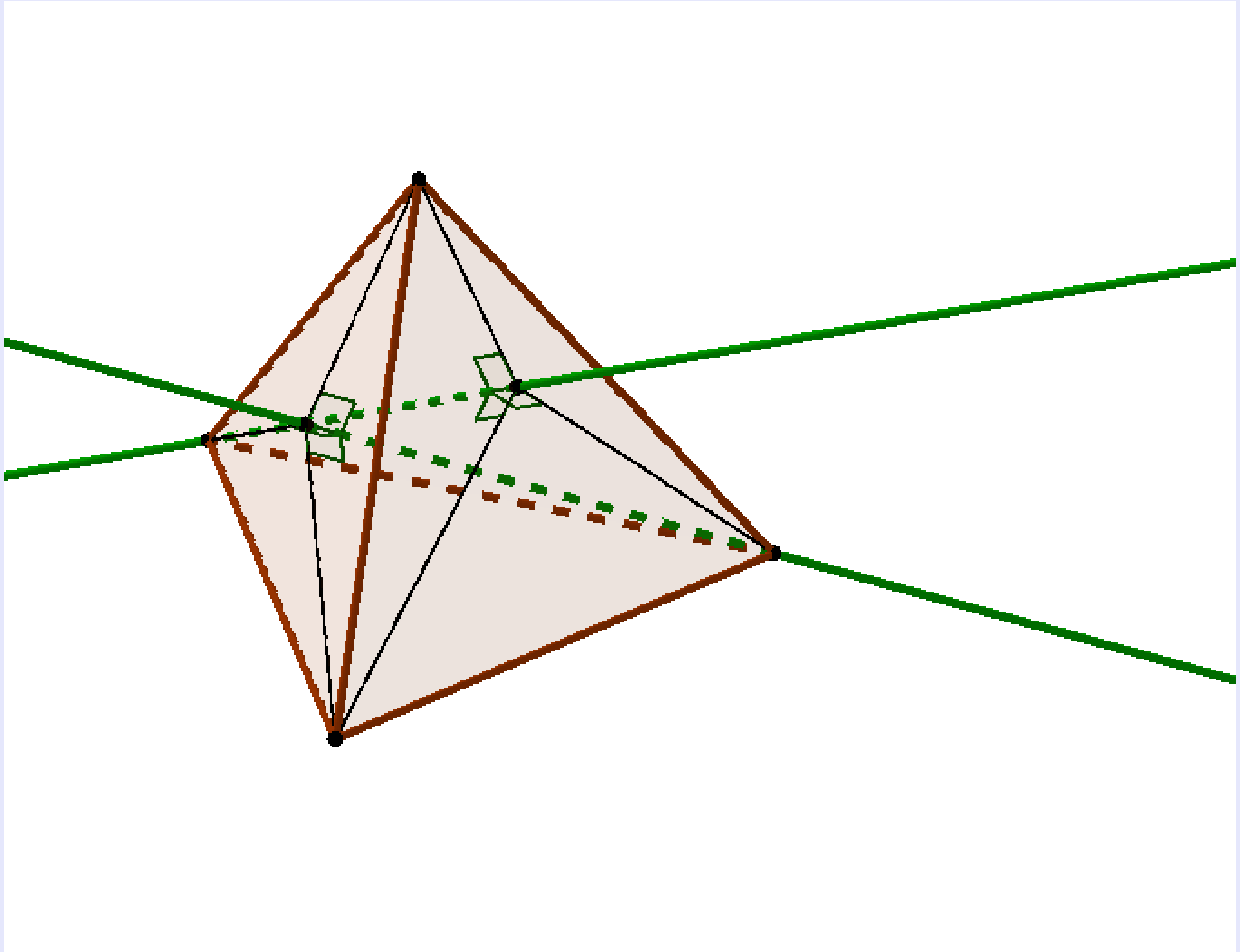
Utilité du logiciel :

Mieux visualiser la notion de plan médiateur, et comprendre pourquoi l'ensemble des points M *tels que* $\mathrm{MA}=\mathrm{MB}$ *n'est pas une droite.*



IV. 6. Hauteurs d'un tétraèdre.

Utilité du logiciel : voir que les hauteurs d'un tétraèdre ne sont pas, en général, concourantes.



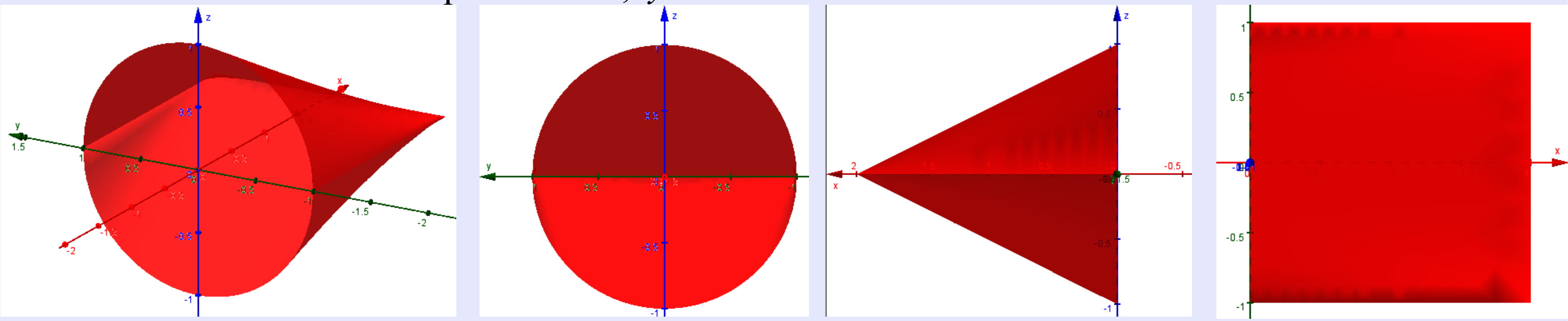
IV. 7. Visualiser une surface.

D'après l'exercice 43p450, Maths, collection Terracher : Le bouchon universel.

On considère la surface d'équation implicite $z^2 = \left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2 \cos^2 y$ pour $0 \leqslant x \leqslant 2$ et $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

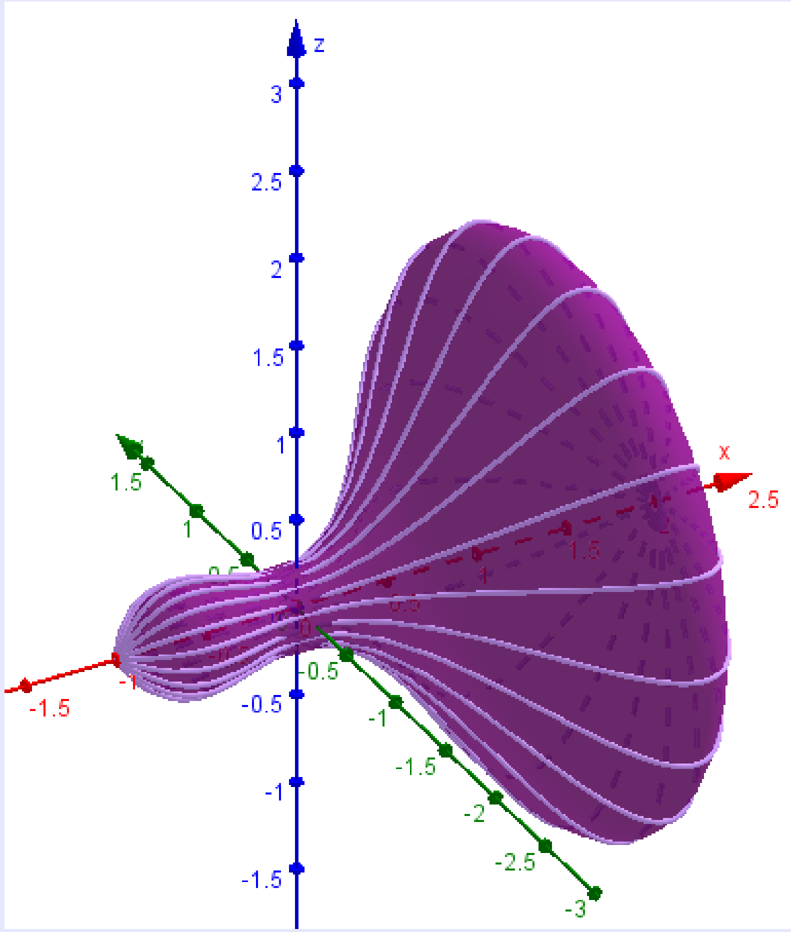
1. Obtenir la surface S à l'aide des commandes
$Surface[u, v, (1 - u/2) * \cos(v), u, 0, 2, v, -\pi \div 2, \pi \div 2]$ et
$Surface[u, v, -(1 - u/2) * \cos(v), u, 0, 2, v, -\pi \div 2, \pi \div 2]$

2. Observer S dans les plans $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$.



IV. 8. Créer une surface de révolution.

Exemple : $f(x)=\frac{1}{2}(x^2+0{,}2)(x+1)(x-2)$ pour $x\in[-1;2]$.



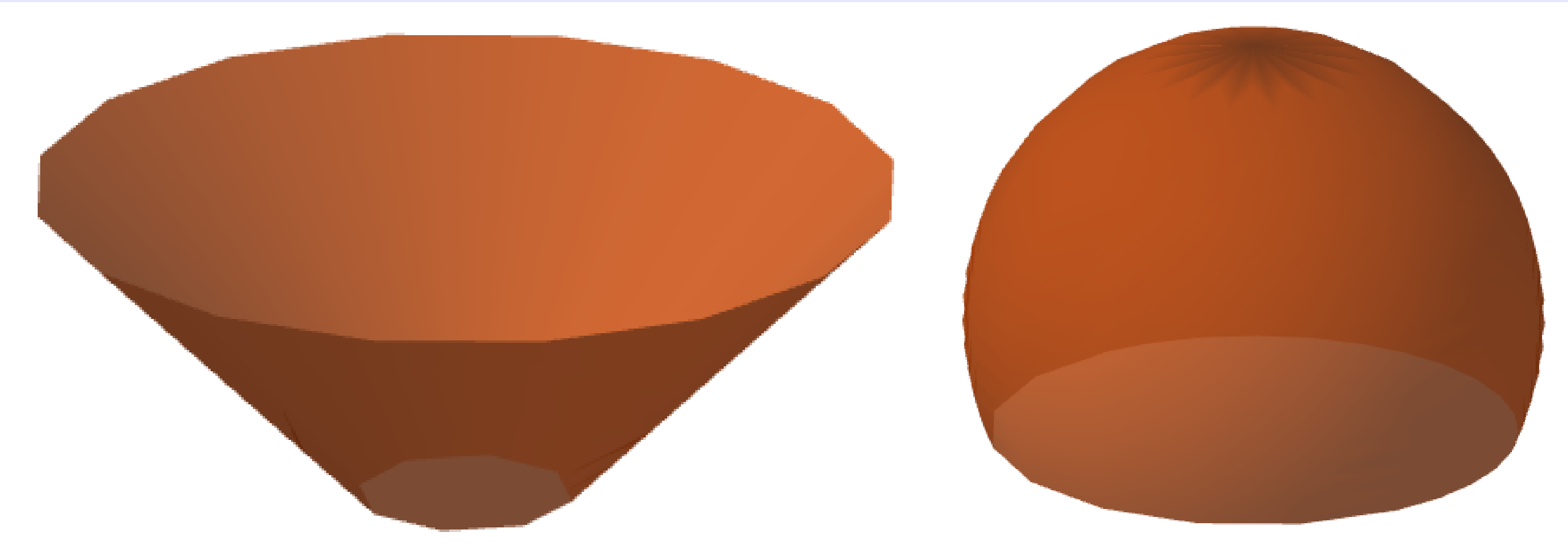
- La surface s'obtient en entrant
  $Surface[a, f(a)\cos(b), f(a)\sin(b), a, -1, 2, b, 0, 2\pi]$

- Les "rayures" s'obtiennent en entrant
  $Courbe[a, f(a)\cos(u), f(a)\sin(u), a, -1, 2]$
  u étant un curseur allant de 0 à 2π.

IV. 9. Obtenir une sphère ou un cône tronqué

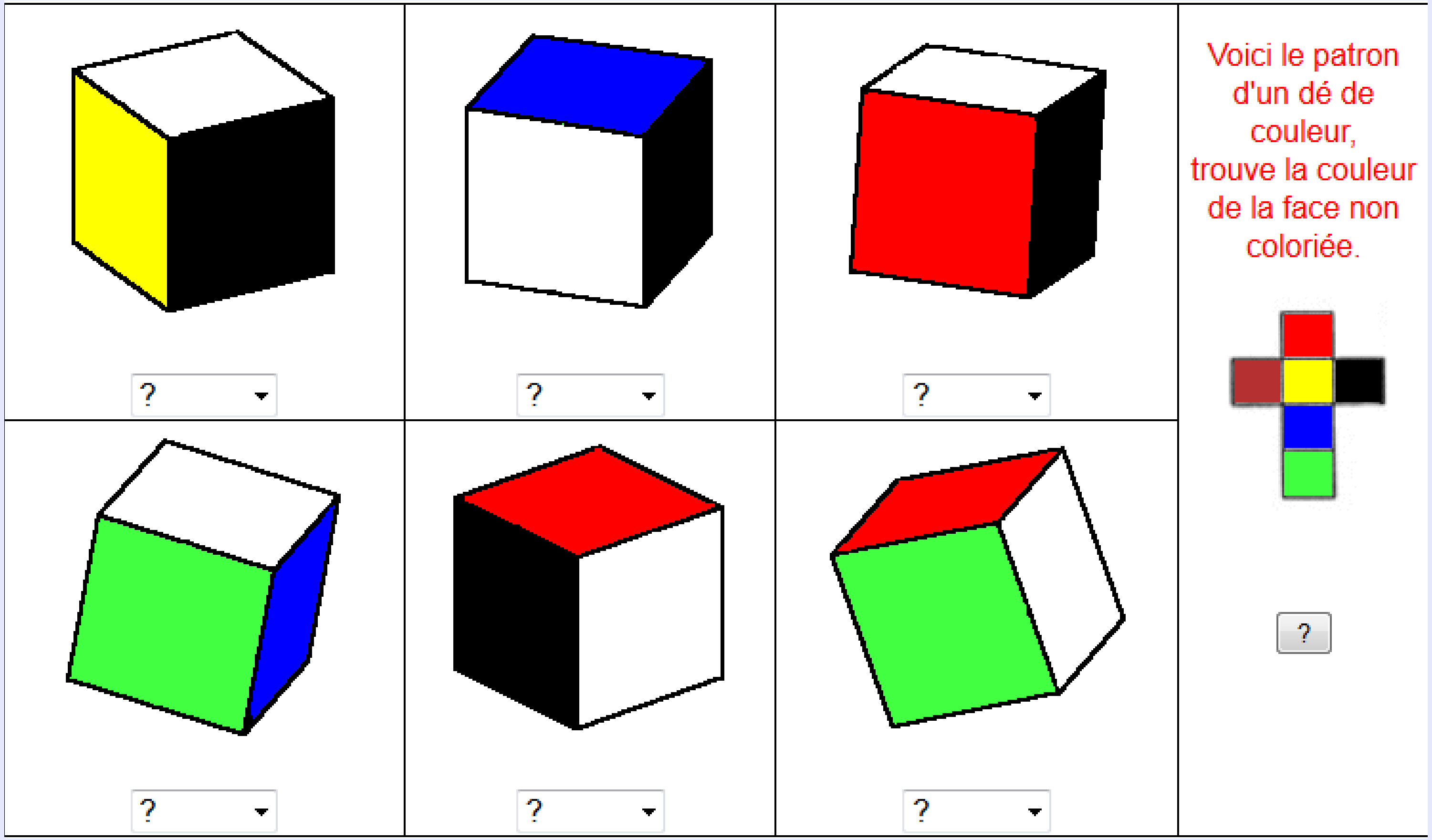
- Pour la sphère tronquée,
  - Créer des curseurs r allant de 0 à 4, et h allant de $-r$ à r
  - Entrer $f(x)=\mathrm{sqrt}(r^2-x^2)$
  - Puis $\mathrm{Surface}[f(a)\cos(b), f(a)\sin(b), a-h, a, h, r, b, 0, 6{,}28319]$

- Pour le cône tronqué, changer f en $f(x)=x$



V. Illustration d'exercices

V. 1. Travail autour d'un patron :



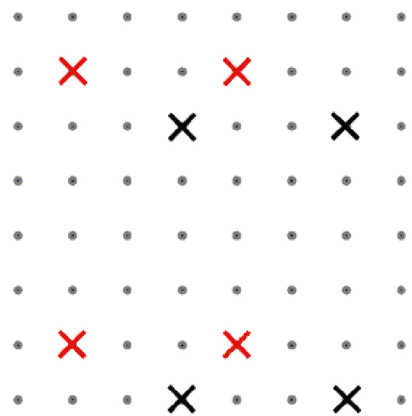
Source : matoumatheux.ac-rennes.fr

V. 2. Exercices sur les perspectives :

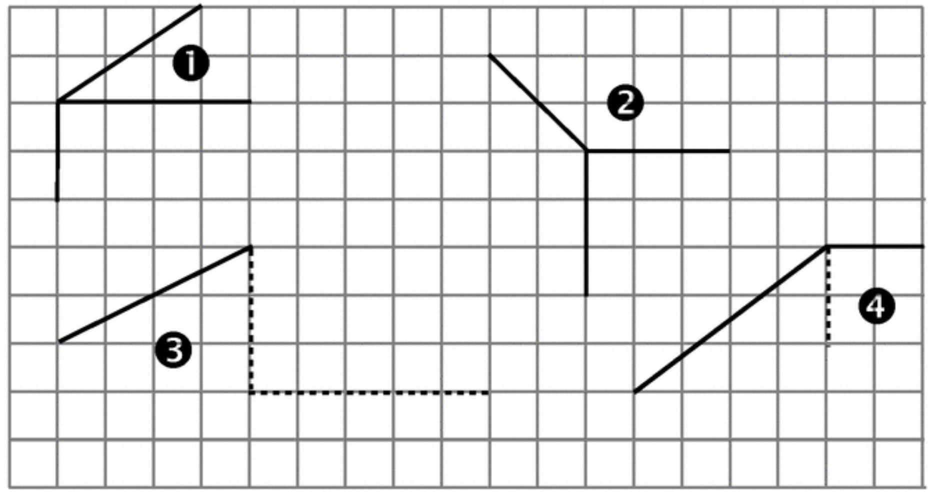
La figure ci-contre représente les huit sommets d'un pavé droit. Reproduis deux figures similaires puis complète-les de façon à ce que les quatre points marqués en rouge forment :

a. la face de devant sur la première figure ;

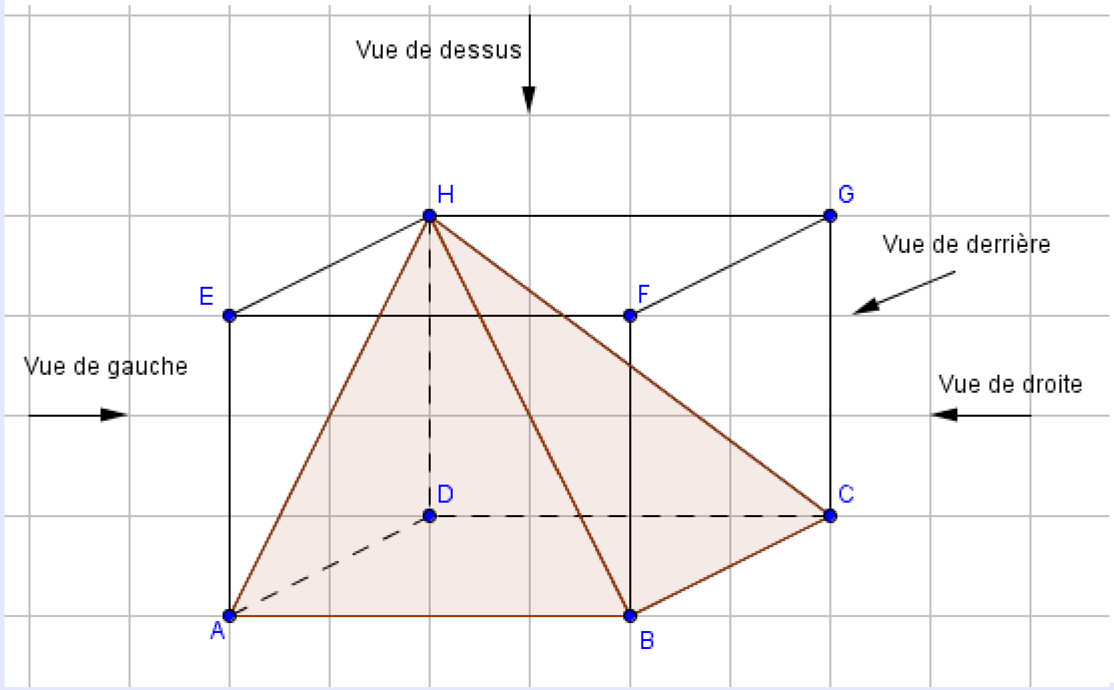
b. la face de derrière sur la deuxième figure.



Reproduis puis complète les dessins suivants pour obtenir des représentations en perspective cavalière de pavés droits.

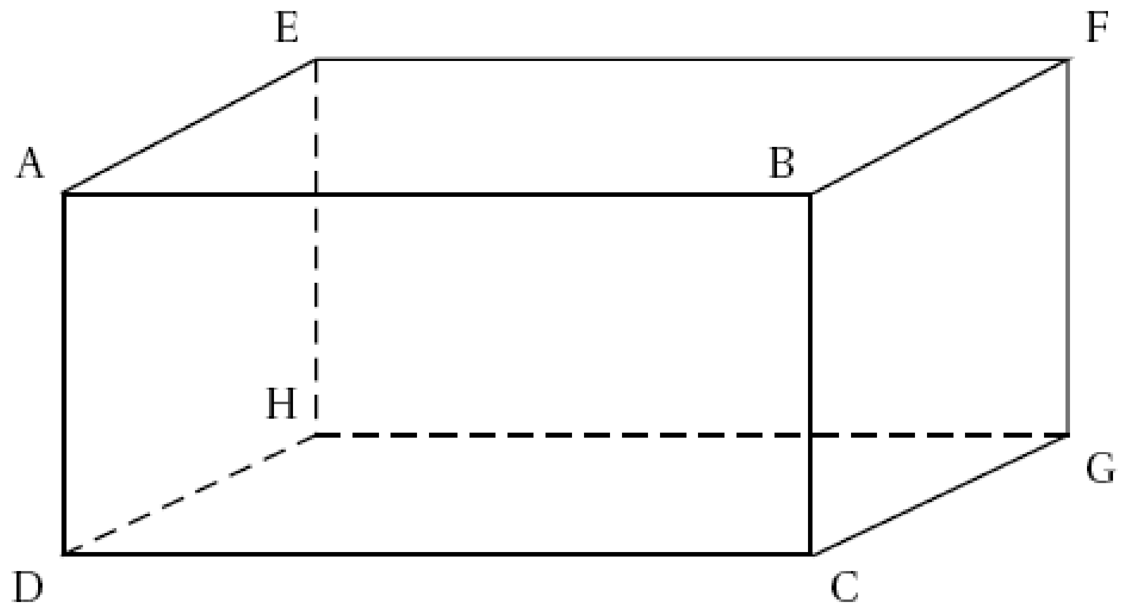


Sources : manuel Sésamaths 6ème



La pyramide HABCD est inscrite dans le parallélépipède ABCDEFGH. Représenter les vues de dessus, dessous, derrière, gauche et droite.

V. 3. Sujet Brevet Aix Marseille juin 2005.

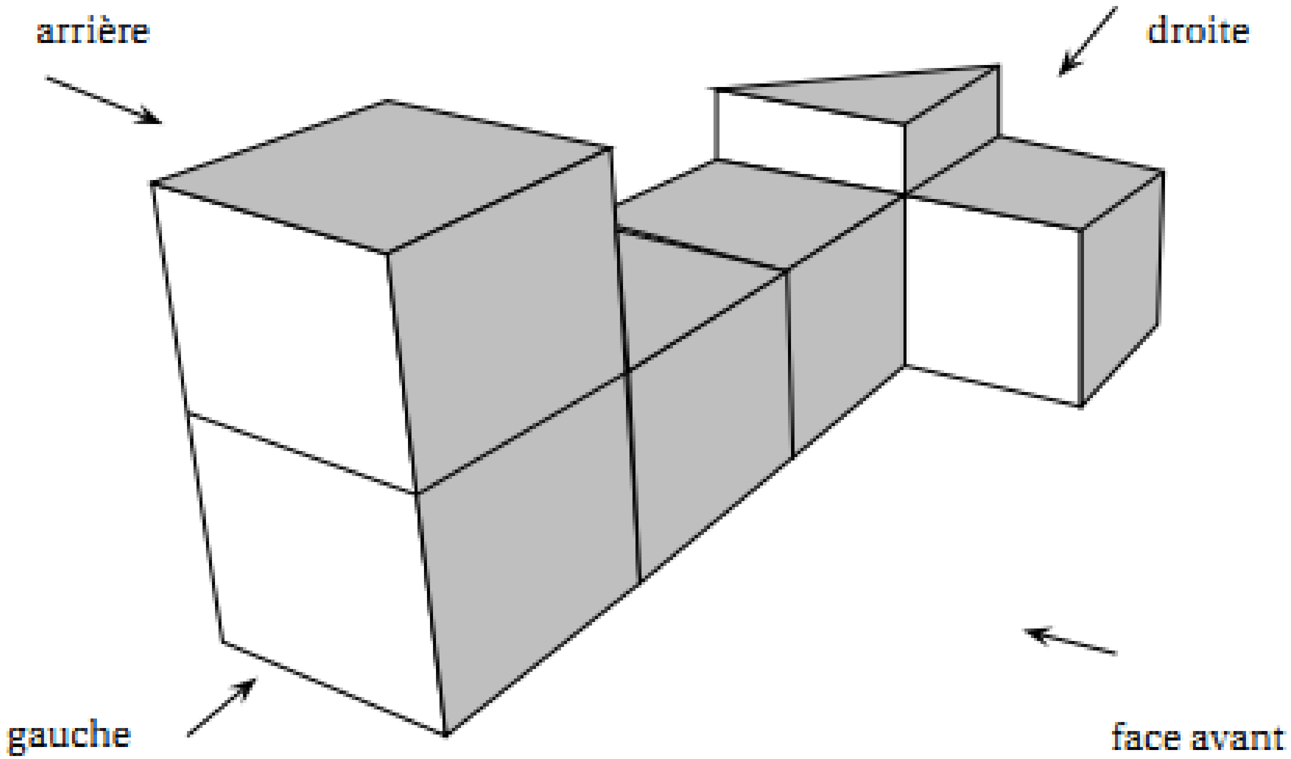


1. **a.** Que peut-on dire des droites (AE) et (AB) ? Le justifier.

b. Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes ?

V. 2. Sujet Brevet Amérique du nord juin 2011.

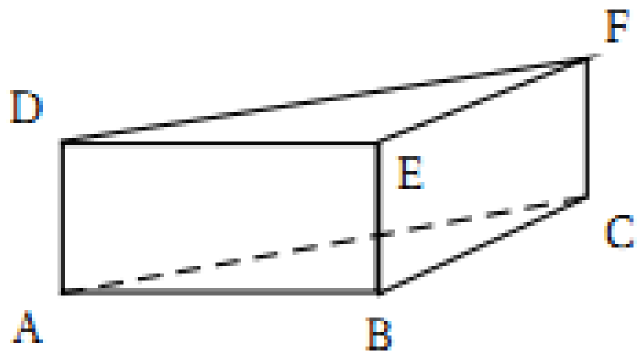
On a empilé et collé 6 cubes de 4 cm d'arête et un prisme droit de façon à obtenir le solide représenté ci-dessous. La hauteur du prisme est égale à la moitié de l'arête des cubes.



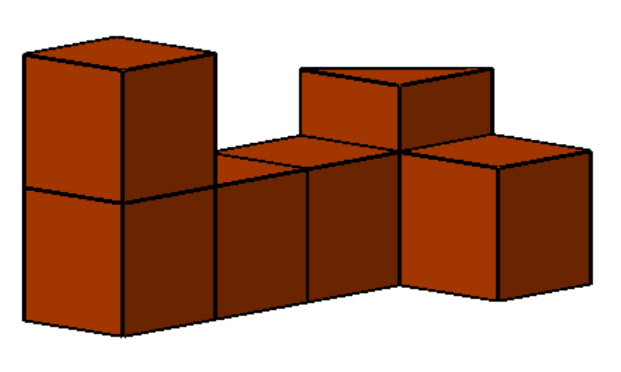
1. Dessiner en vraie grandeur une vue de l'arrière du solide.

3. Étude du prisme droit.

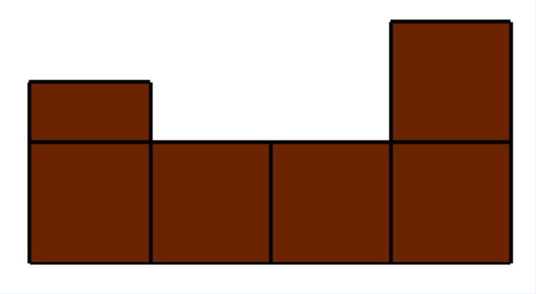
a. On nomme ce prisme ABCDEF, comme sur la figure ci-dessous.



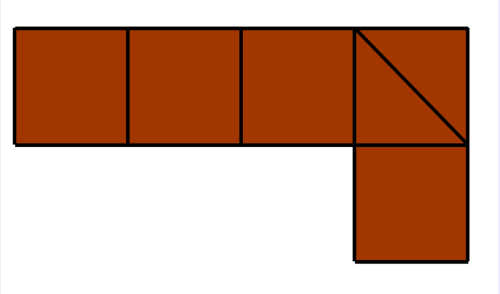
Quelle est la nature de la base de ce prisme droit ? Justifier la réponse.



Vue générale du solide



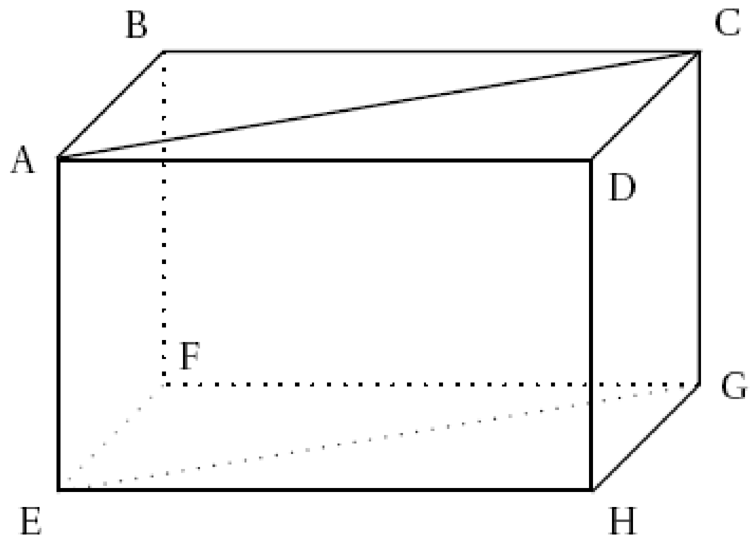
Vue arrière



Vue du dessus

V. 3. Sujet Brevet Aix Marseille juin 2004.

On considère le pavé droit ABCDEFGH représenté ci-dessous :

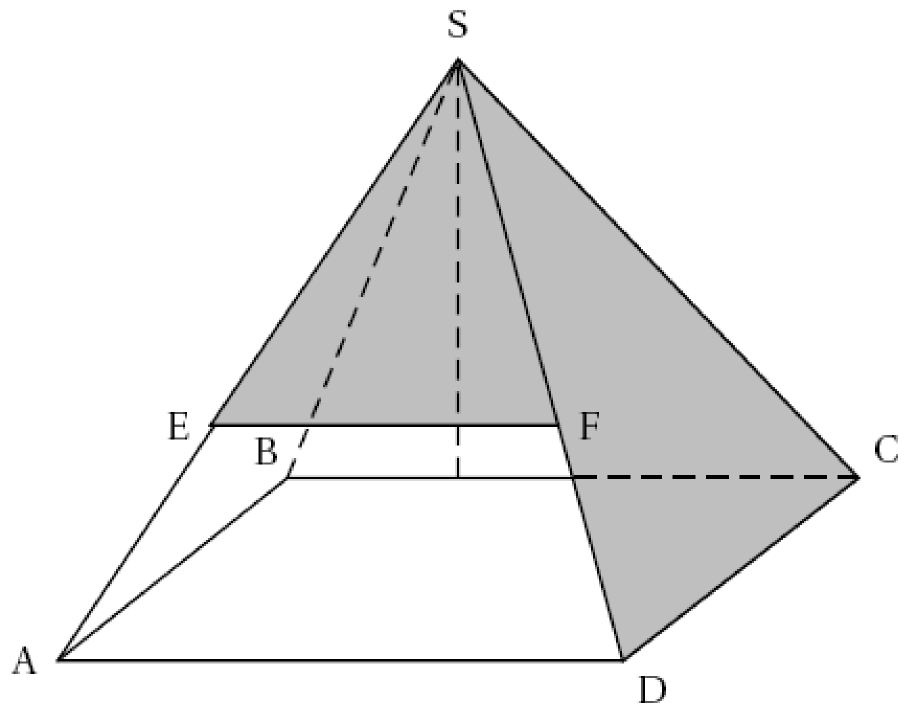


Observer la figure et compléter le tableau ci-dessous (annexe 1 de votre sujet). Sans justification.

OBJET	NATURE DE L'OBJET
Triangle ABC	
Angle $\widehat{ABF}$	
Quadrilatère ABFE	
Angle $\widehat{ACG}$	
Quadrilatère ACGE	

V. 4. Sujet Brevet métropole septembre 2012

On veut réaliser un tipi qui aura la forme d'une pyramide ayant pour base un rectangle ABCD de centre H et pour hauteur [SH] (voir le schéma ci-contre).
Le tipi aura les dimensions suivantes :
AD = 1,60 m, CD = 1,20 m et
SH = 2,40 m.



2. Calculer la longueur BD.

3. L'armature du tipi, constituée du cadre rectangulaire ABCD et des quatre arêtes latérales issues de S, est faite de baguettes de bambou.
Dans cette question on n'attend pas de démonstration rédigée. Citer une propriété et présenter clairement un calcul suffit.

   a. Montrer que : SD = 2,60 m.

Utilité du logiciel :

Recréer ce solide en faisant apparaître le point H.

Montrer que ABD *est rectangle pour l'utilisation du théorème de Pythagore*

Montrer que H *est le milieu de* [BD] *(justification de* HD=1*) puis que* SHD *est également rectangle (pour une nouvelle utilisation du théorème de Pythagore)*

V. 5. Sujet Brevet centre étranger Nice juin 2004.

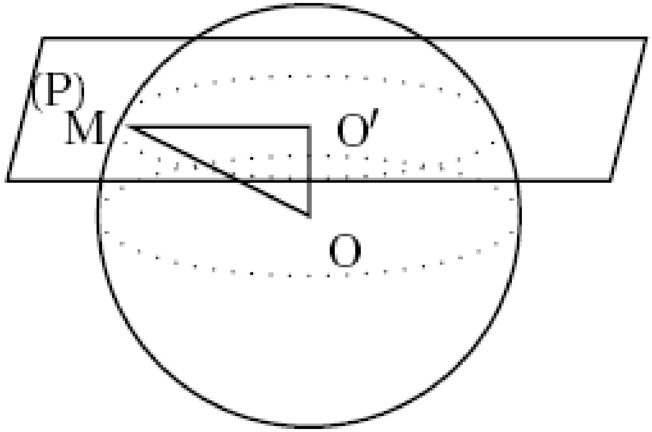
On considère la sphère de centre O et de rayon 6 cm.

1. Écrire le volume de cette sphère et en donner un arrondi au mm^3.

2. On note O′ le point tel que : OO′ = 4 cm. (P) est le plan passant par le point O′ et perpendiculaire à la droite (OO′).

On note M le point appartenant au plan (P) et à la sphère.

Aucun calcul n'est nécessaire pour les deux constructions suivantes :



a. Tracer en vraie grandeur le triangle OO′M.

b. Tracer en vraie grandeur l'intersection de la sphère et du plan.

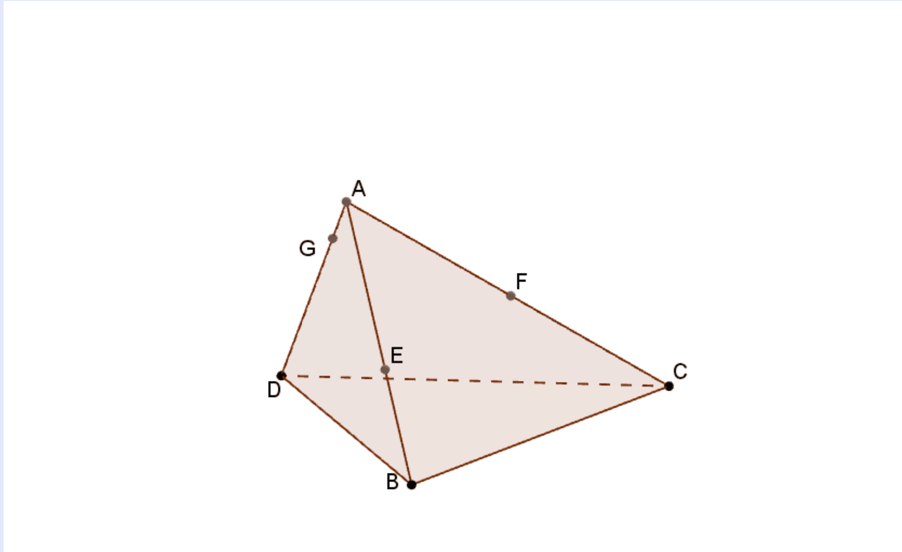
V 6. Position relative de plans et de droites.

Exercice 1 :

$ABCD$ est un tétraèdre.

E, F, G sont trois points de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$.

Tracer l'intersection des plans (EFG) et (BCD)

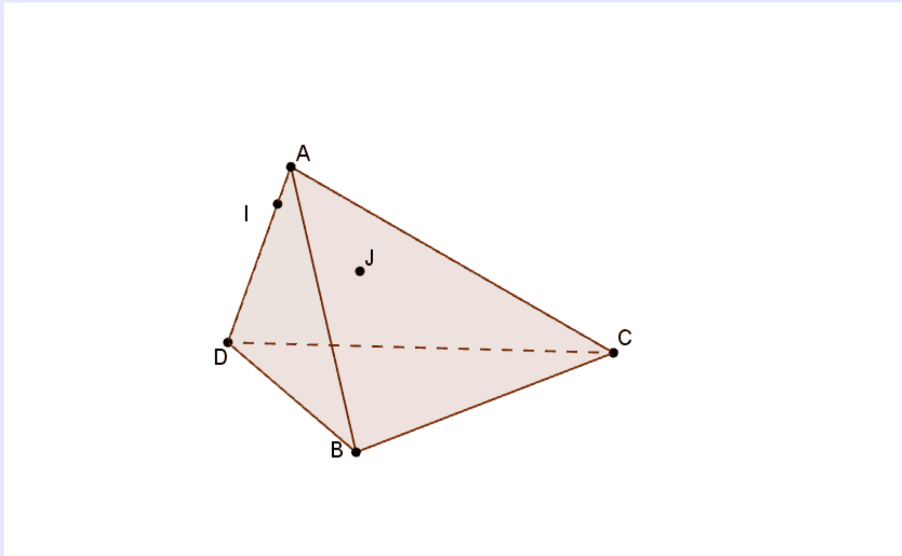


Exercice 2 :

$ABCD$ est un tétraèdre.

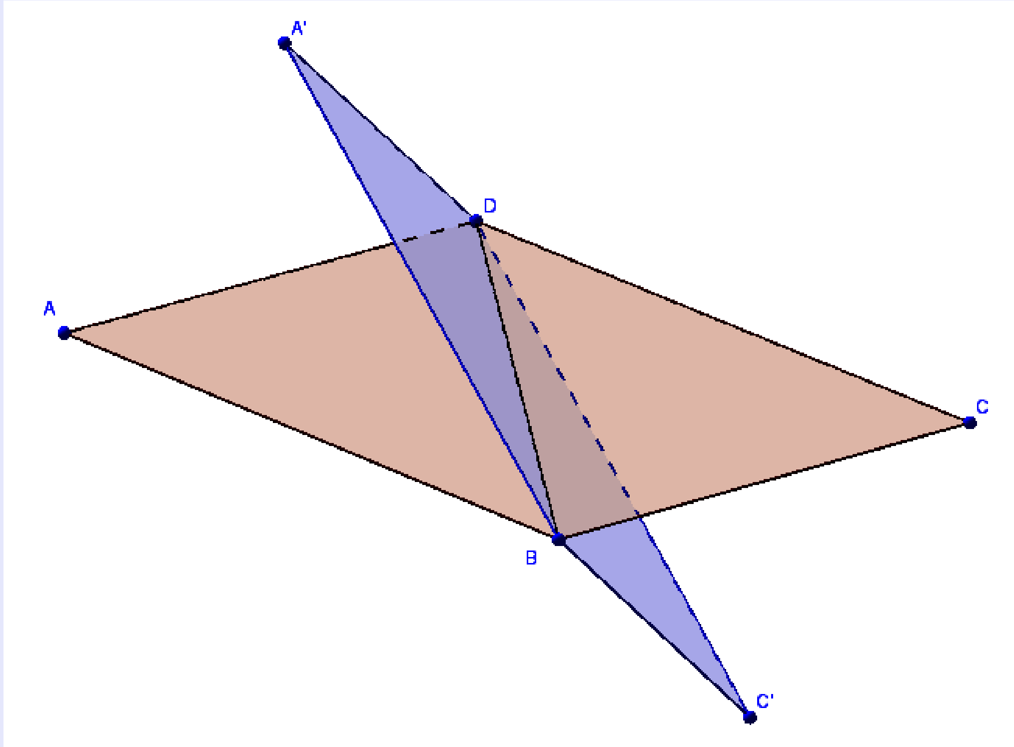
I est un point de l'arête $[AD]$ et J un point de la face ABC.

Construire l'intersection de la droite (IJ) et du plan (BCD) .



V. 7. Points coplanaires.

On considère un parallélogramme $ABCD$, qu'on fait pivoter autour de sa diagonale (BD) pour obtenir un nouveau parallélogramme $A'BC'D$.



1. Montrer que A, A', C et C' appartiennent à un même plan $\mathscr{P}$.

2. Montrer que si $ABCD$ est un losange, (BD) est orthogonale à $\mathscr{P}$.

Utilité du logiciel :
Mieux assimiler la configuration et mieux comprendre la notion de points coplanaires.

V. 8. Vecteurs coplanaires.

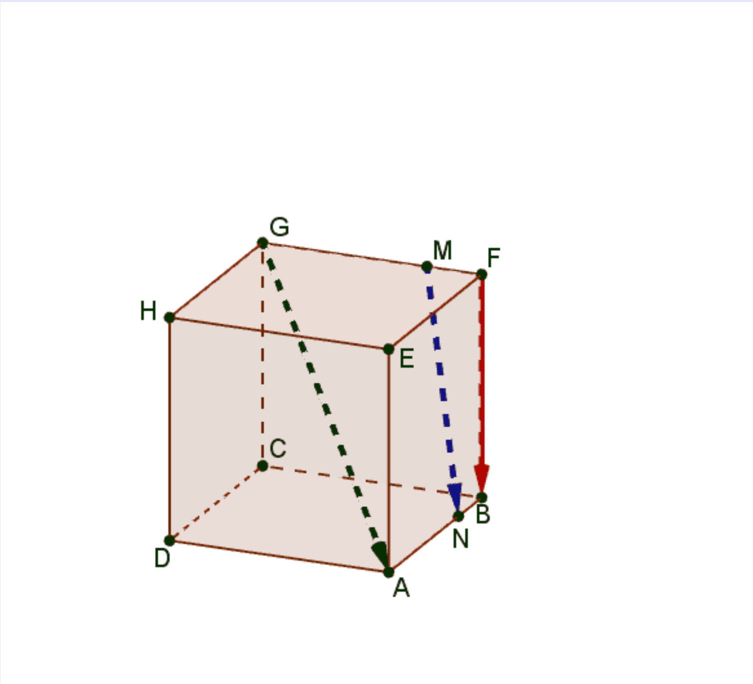
Exercice 47p305, Hyperbole

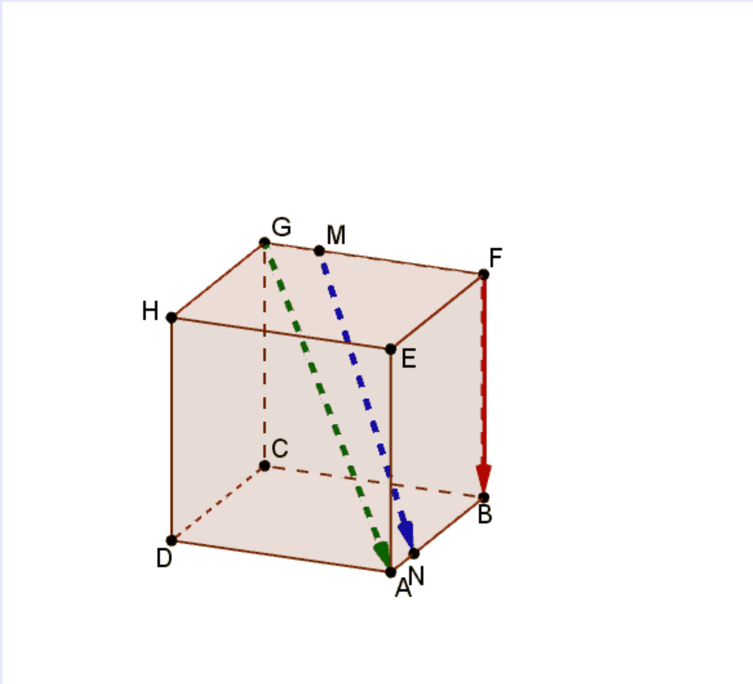
ABCDEFGH est un cube, M et N sont des points tels que $\overrightarrow{MF}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{FB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{GE}$.

2. En déduire que $\overrightarrow{FB}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{GA}$ sont coplanaires.

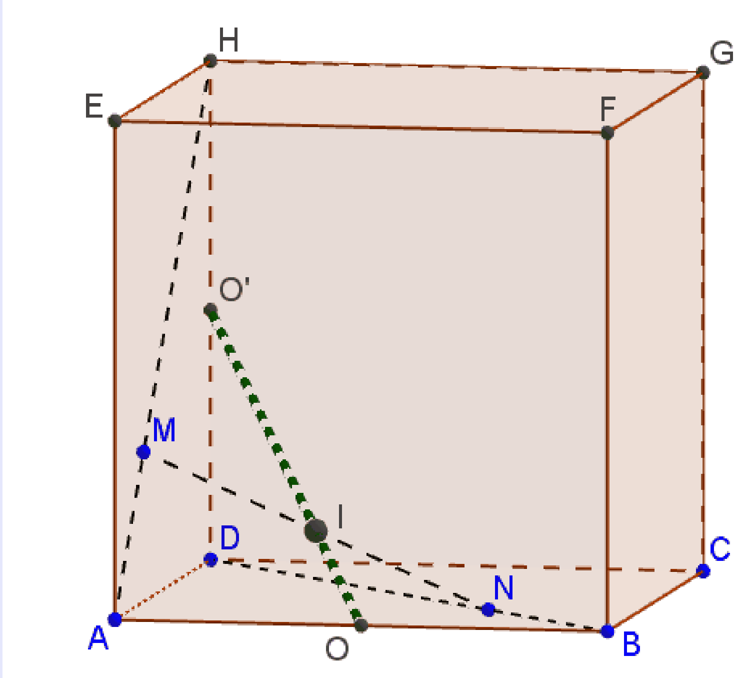
3. Et si on remplace $\frac{1}{4}$ par λ avec $\lambda\in[0;1]$?





V. 9. Ensemble de points.

Exercice 114p317, Hyperbole



$ABCDEFGH$ est un cube, λ est un nombre réel de $[0;1]$.

M et N sont définis par $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{BN}=\lambda\overrightarrow{BD}$

1. a. Montrer que $\overrightarrow{MN}=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}-\lambda\overrightarrow{AE}$.

b. En déduire que la droite (MN) est parallèle à un plan fixe à préciser.

2. On note I, O et O' les milieux de $[MN]$, $[AB]$ et $[DH]$.

a. Démontrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{1-\lambda}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AE}+\lambda\overrightarrow{AD}$.

b. On se place dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Déterminer les coordonnées des points O, I et O' dans ce repère.

c. Prouver que le point I appartient à une droite fixe à préciser.

Utilité du logiciel :

Voir que (MN) *reste parallèle à* (ABE)

Voir que I *reste sur le segment* $[OO']$

VI Sujets de bac

VI. 1. Sujet Bac S Asie juin 2008

Vrai ou faux ?

1. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.

2. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont tels que : $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$.

3. Si $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont trois plans distincts de l'espace vérifiant :

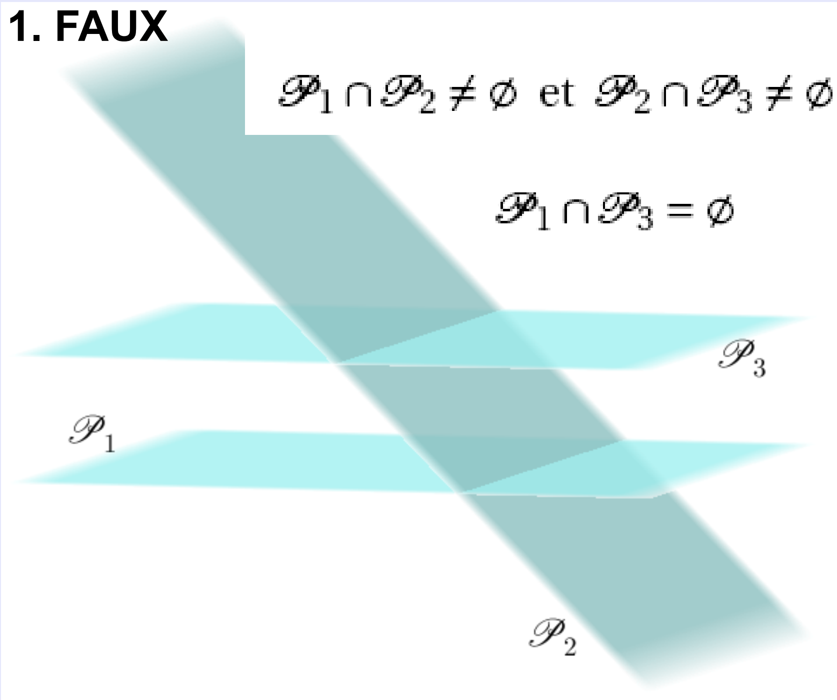
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset,$$

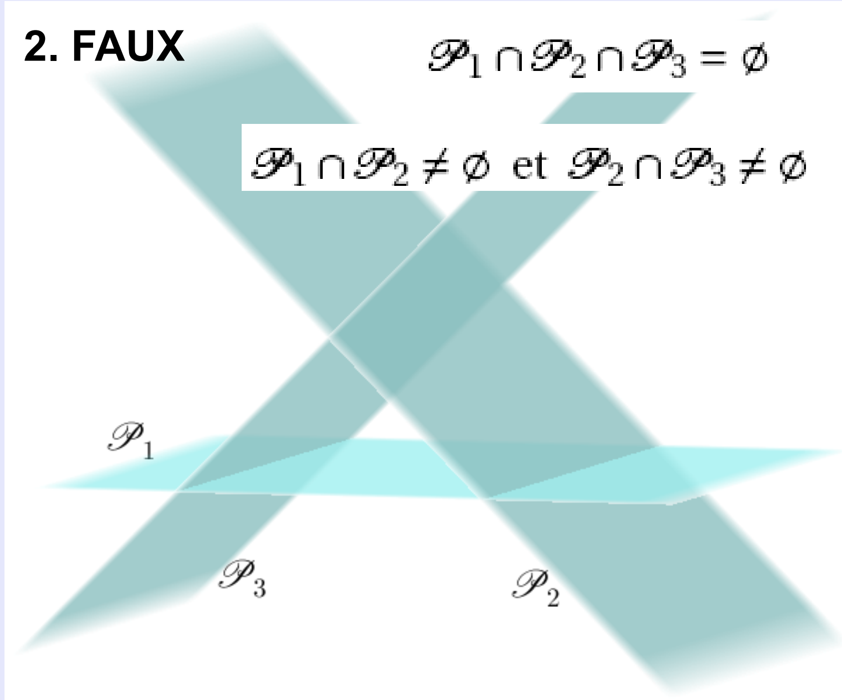
alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ vérifient : $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$.

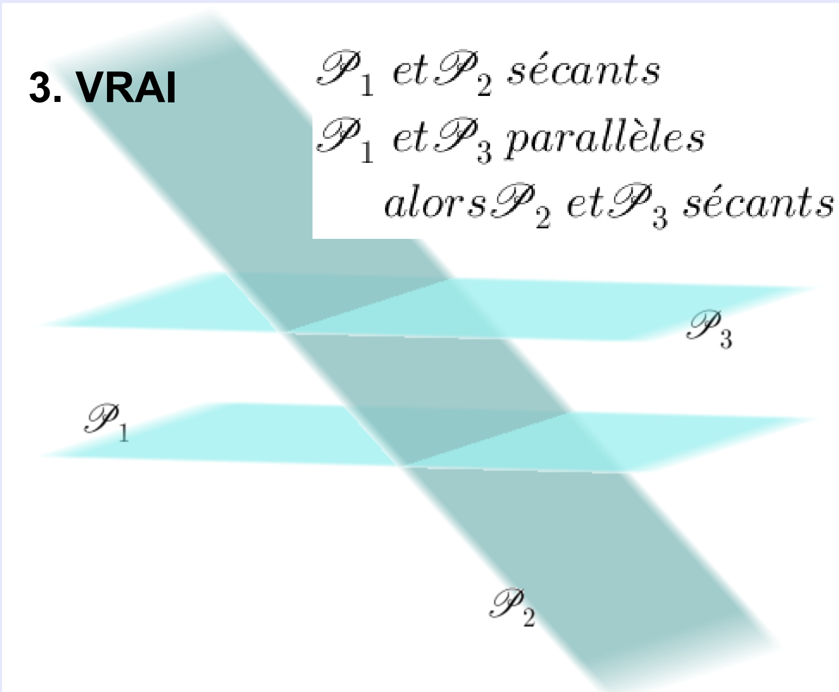
4. Si $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont deux plans distincts et $\mathscr{D}$ une droite de l'espace vérifiant :

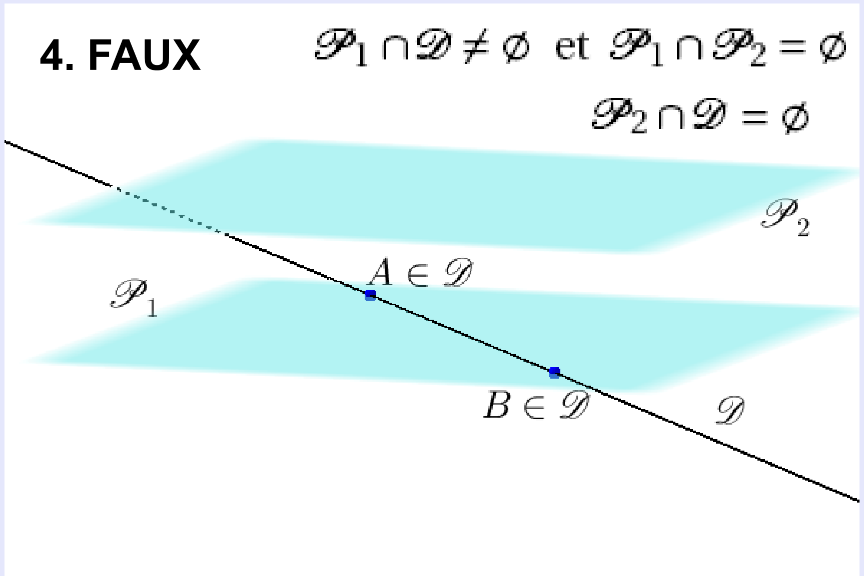
$$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset \text{ et } \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset,$$

alors on peut conclure que $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset$


1. FAUX
$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$
$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$
$\mathscr{P}_3$
$\mathscr{P}_1$
$\mathscr{P}_2$


2. FAUX
$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 = \emptyset$
$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \neq \emptyset$ et $\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3 \neq \emptyset$
$\mathscr{P}_1$
$\mathscr{P}_3$
$\mathscr{P}_2$


3. VRAI
$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sécants
$\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ parallèles
alors $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sécants
$\mathscr{P}_3$
$\mathscr{P}_1$
$\mathscr{P}_2$


4. FAUX
$\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{D} \neq \emptyset$ et $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 = \emptyset$
$\mathscr{P}_2 \cap \mathscr{D} = \emptyset$
$\mathscr{P}_2$
$A \in \mathscr{D}$
$\mathscr{P}_1$
$B \in \mathscr{D}$
$\mathscr{D}$

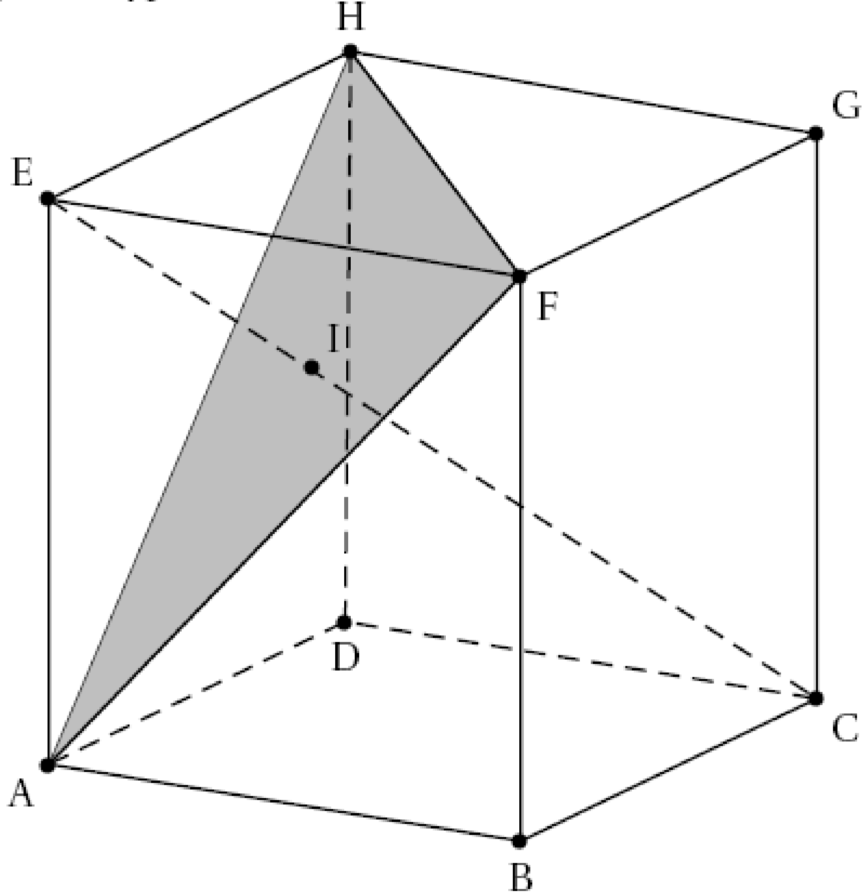
VI. 2. Sujet Bac S Asie juin 2011

Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Définitions :

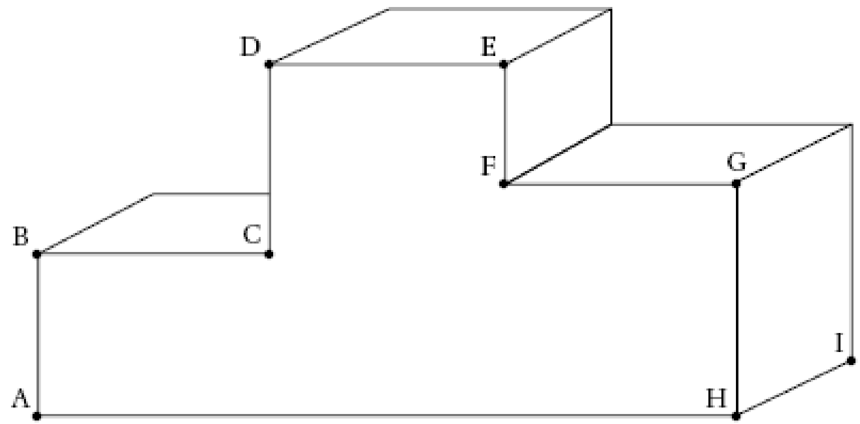
- un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
- il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
- il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.



VI. 3. Sujet Bac STD2A : Polynésie juin 2013

Lors des Jeux Olympiques de Londres, un caméraman souhaite avoir un certain point de vue sur le podium des médaillés. Le podium est formé par l'assemblage de trois pavés droits.
Sur la figure suivante , le podium est représenté en perspective parallèle.
Les longueurs CD et GH sont égales, ainsi que les longueurs AB et EF. On sait de plus que la longueur CD est le double de la longueur AB.



1. Construire sur l'annexe 1 la représentation de ce podium en perspective centrale.
   Les points v et v' sont les points de fuite respectifs des droites (AH) et (HI). Les images des points A, B, C, D, E, F, G, H et I dans la représentation en perspective centrale sont notées avec des lettres minuscules a, b, c, d, e, f, g, h et i.

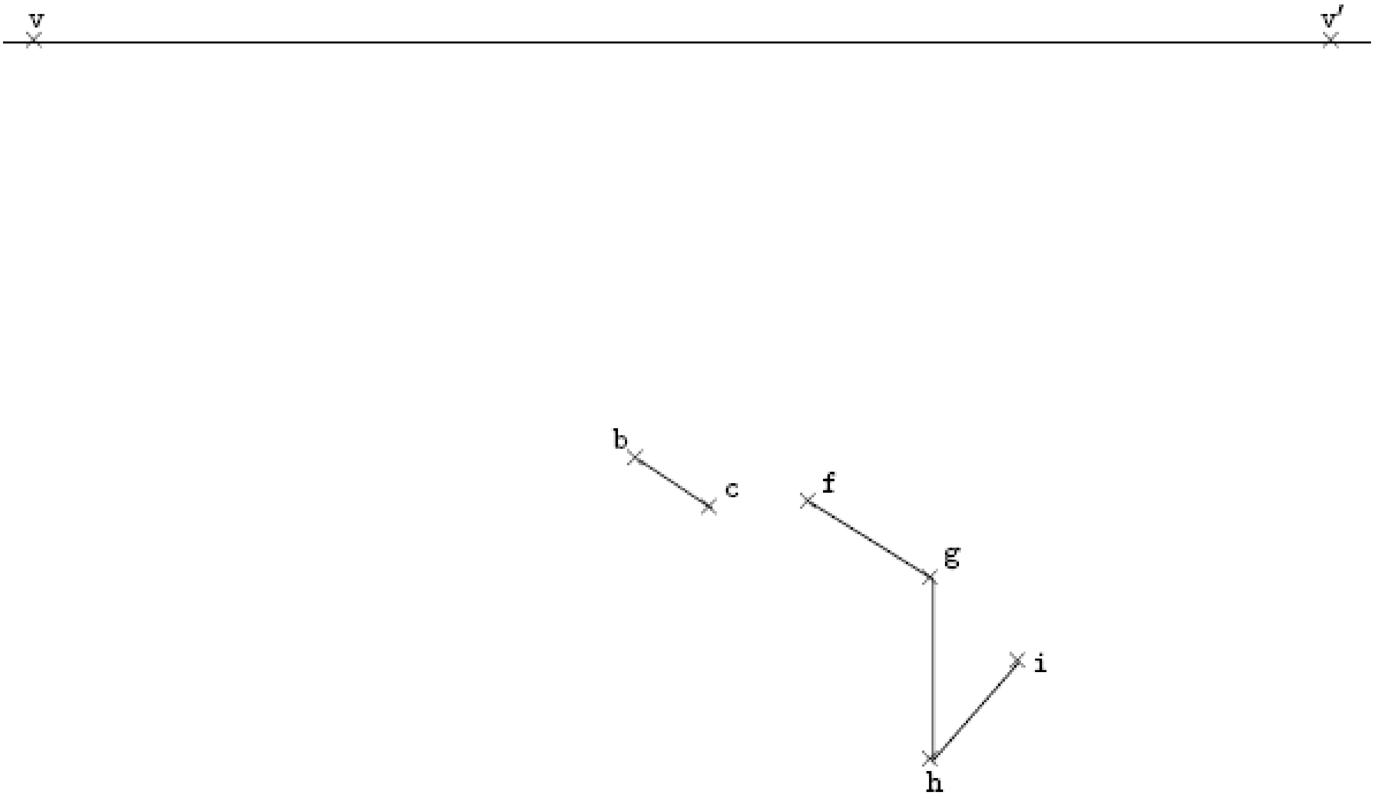
   On laissera apparents les traits de construction.

2. Un lampadaire vertical est placé à proximité du podium en O. La source lumineuse se situe au sommet du lampadaire en S. On utilise un logiciel de modélisation 3D pour représenter la scène en «plongée» (voir l'annexe 2). L'objectif est de construire l'ombre du podium générée par cet éclairage.

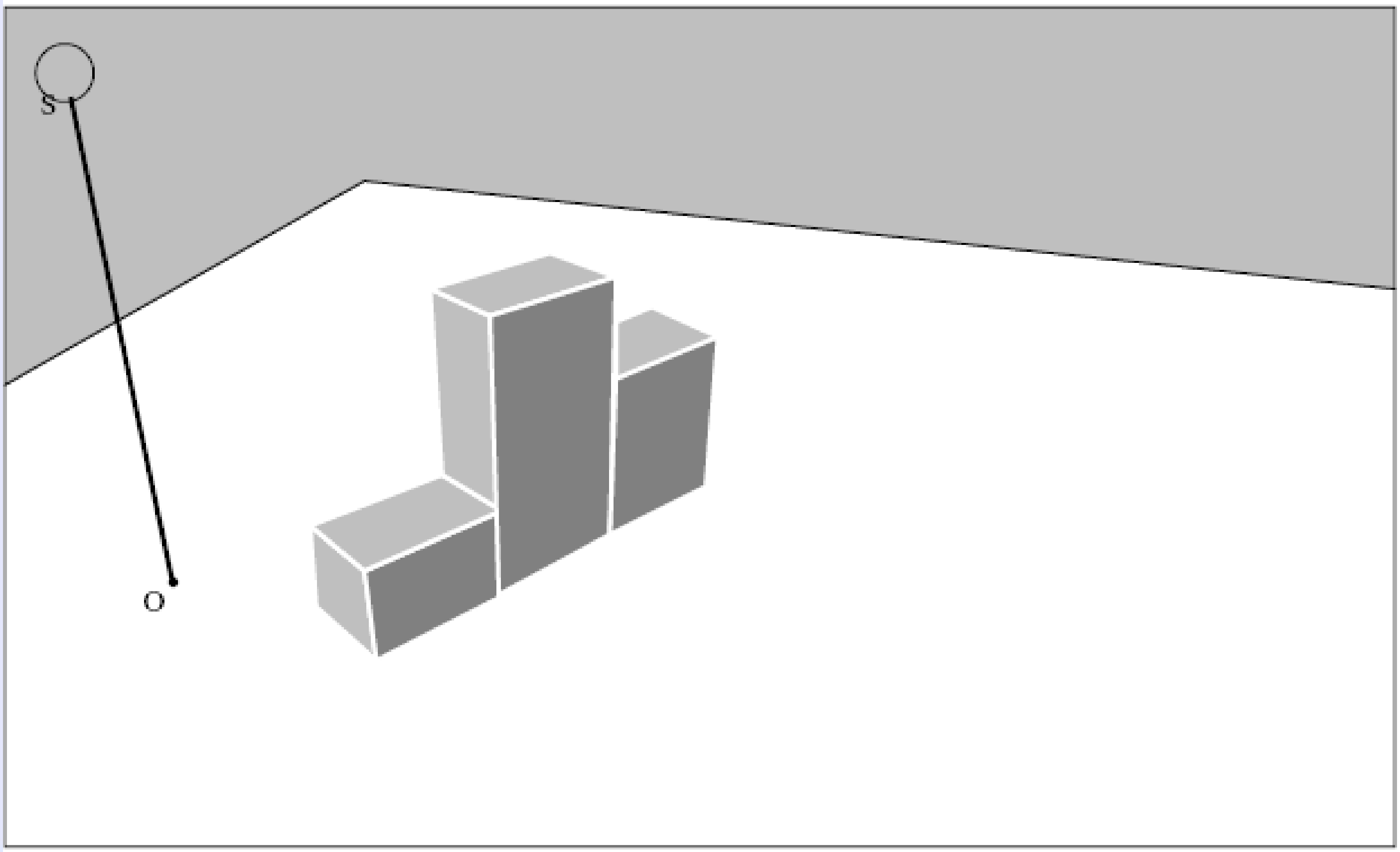
   a. Justifier que les points O, S, A et B appartiennent à un même plan.
   b. Construire sur l'annexe 2 le point B′ correspondant à l'ombre du point B, en laissant apparents les traits de construction.

3. Achever sur l'annexe 2 la construction de l'ombre du podium générée par cette source lumineuse.

Annexe 1, à rendre avec la copie



Annexe 2, à rendre avec la copie



VI. 4. Bac S Amériques du Nord mai 2014

On considère un cube ABCDEFCH donné en annexe 2 (à rendre avec la copie).
On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

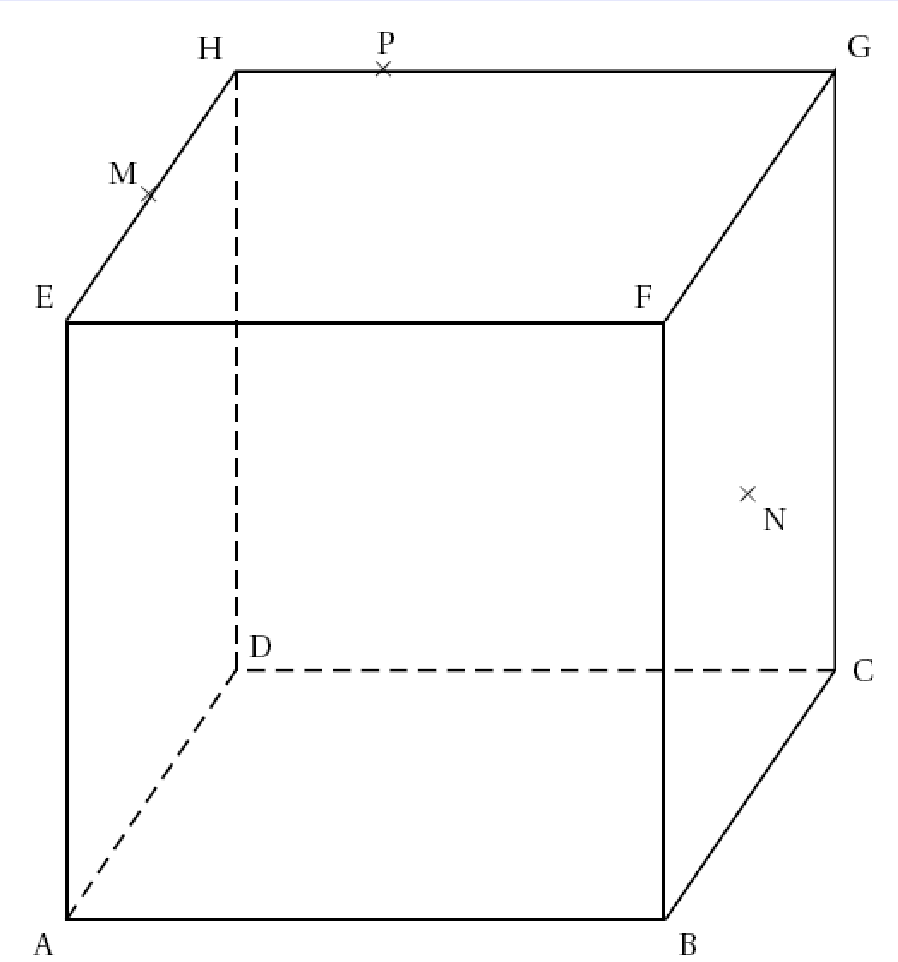
Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

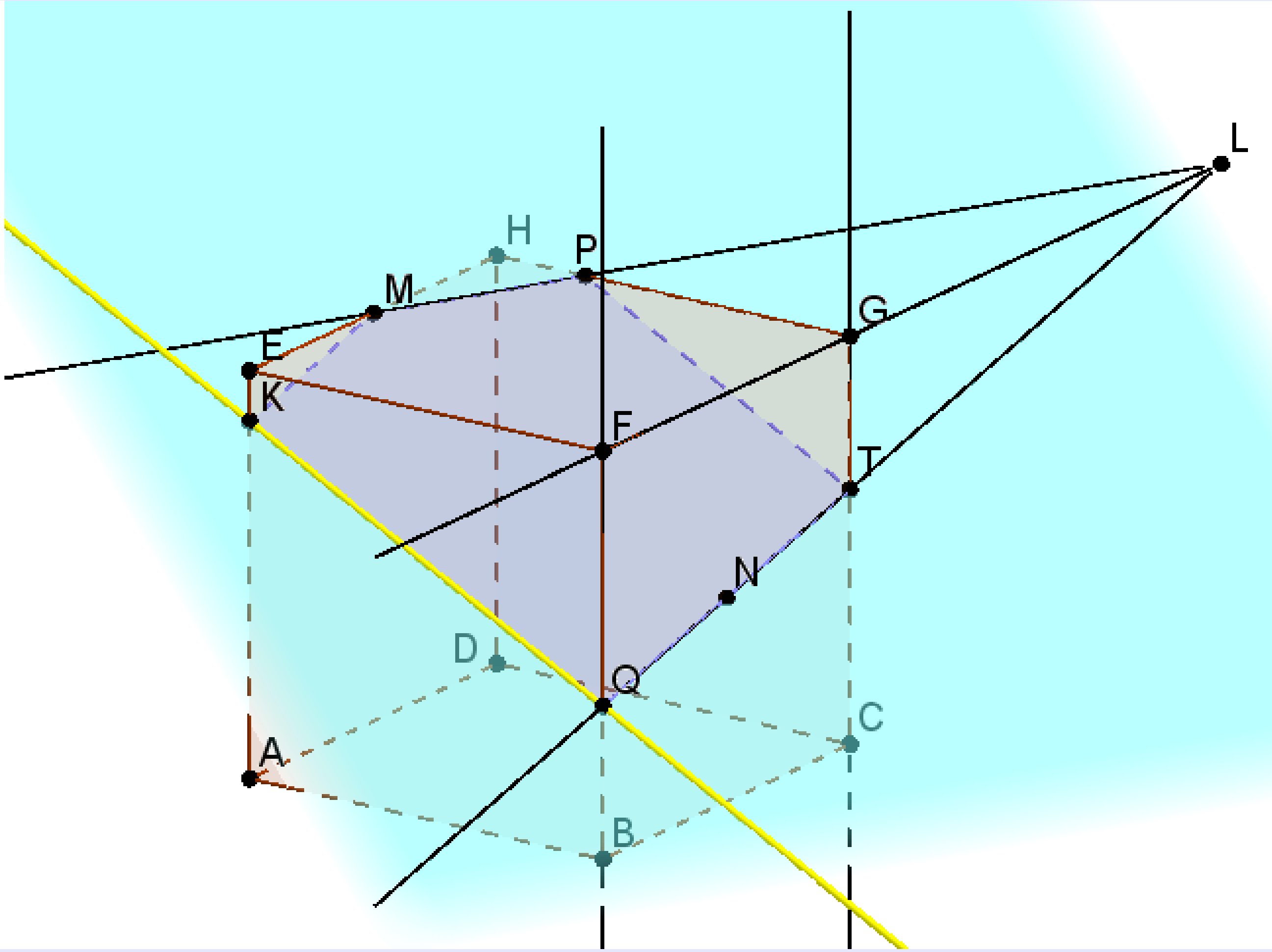
1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L.
   Construire le point L
2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.
   On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.
   a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.
   b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).
3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Donner les coordonnées des points M, Net P dans ce repère.
2. Déterminer les coordonnées du point L.
3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.
   Le triangle TPN est-il rectangle en T ?


H
P
G
M
E
F
N
D
C
A
B

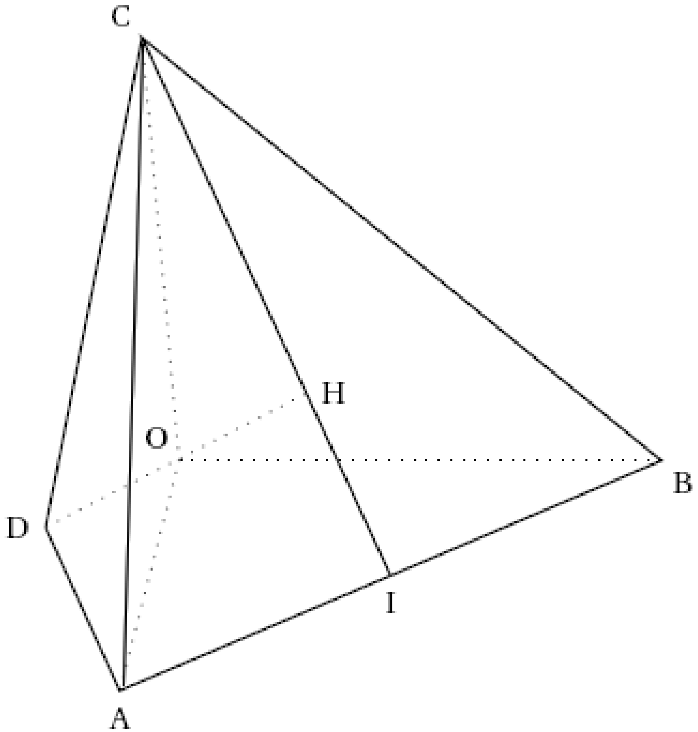

L
H
P
M
G
E
K
F
T
N
D
Q
C
A
B

VI. 5. Sujet Bac S métropole juin 2003

Soient a un réel strictement positif et OABC un tétraèdre tel que :

- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O,
- $OA = OB = OC = a$.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace défini par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Démontrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales, puis que H est l'orthocentre du triangle ABC.

4. Étude du tétraèdre ABCD.

L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O\,;\ \frac{1}{a}\overrightarrow{OA},\ \frac{1}{a}\overrightarrow{OB},\ \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

a. Démontrer que le point H a pour coordonnées : $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

b. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes ont même longueur).

c. Soit Ω le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD. Démontrer que Ω est un point de la droite (OH) puis calculer ses coordonnées.

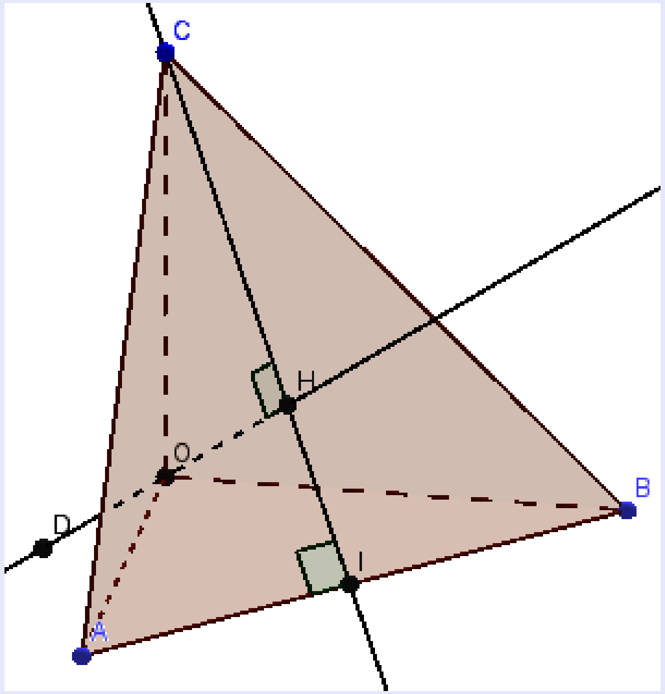
Utilité du logiciel :

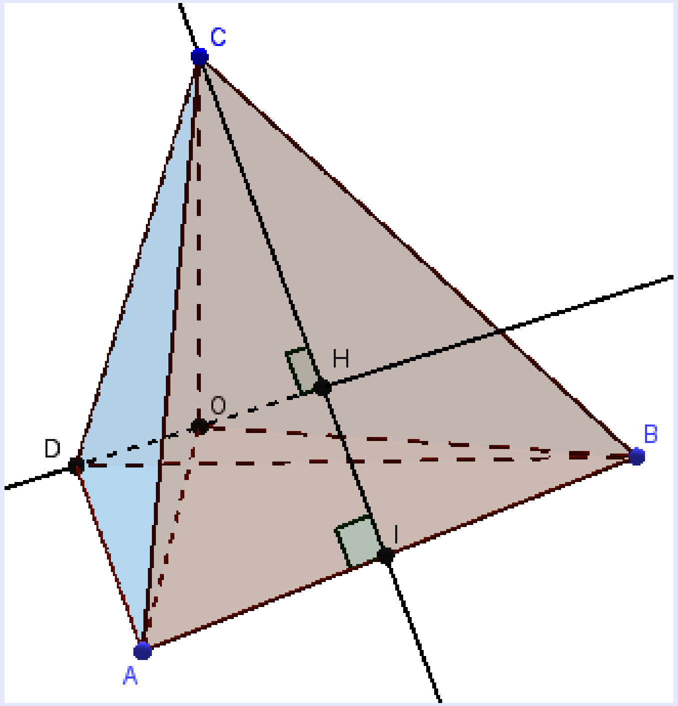
Recréer ce solide et marquer les angles droits.

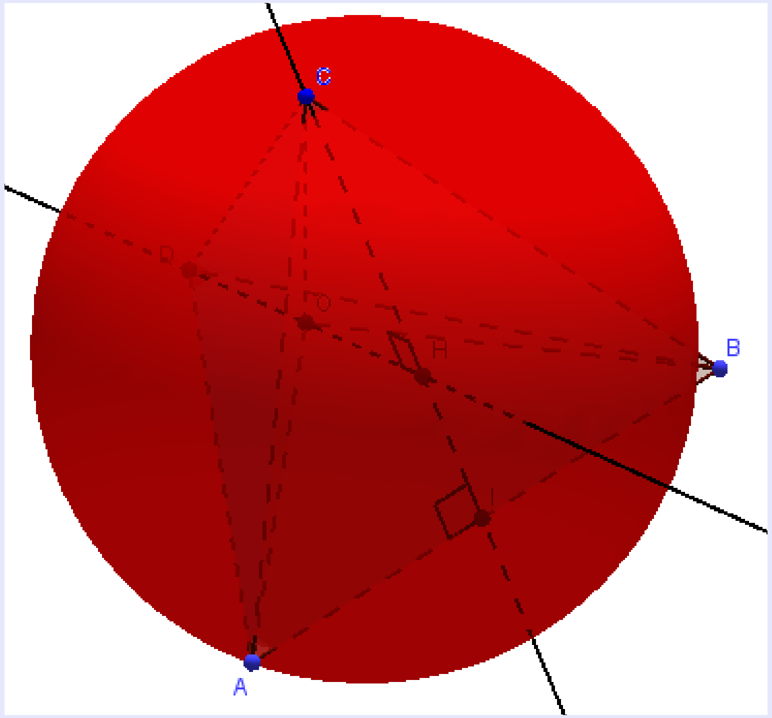
Observer la figure dans le plan (ABC)

Visualiser le tétraèdre ABCD.

Tracer la sphère de centre $\Omega\left(\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6}\,;\frac{1}{6}\right)$ *de rayon* $k\,\Omega\mathrm{A},\ k\in[0{,}9\,;1]$


C
H
O
D
B
I
A


C
H
O
D
B
I
A


C
B
A

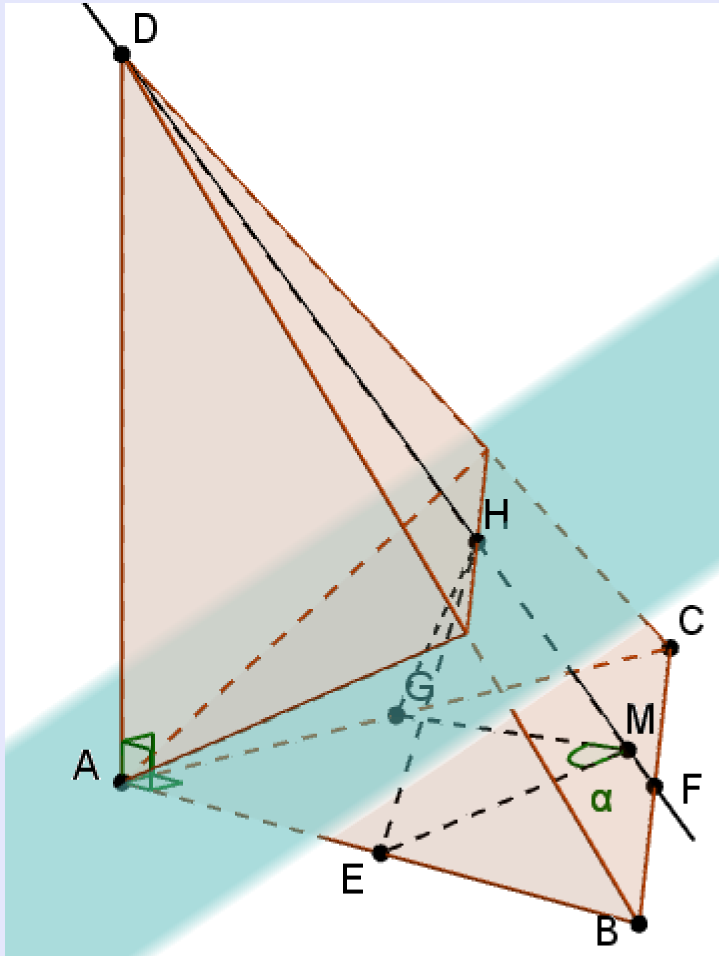
VI. 6. Sujet Bac S métropole juin 2014

Exercice donné sans la figure...

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

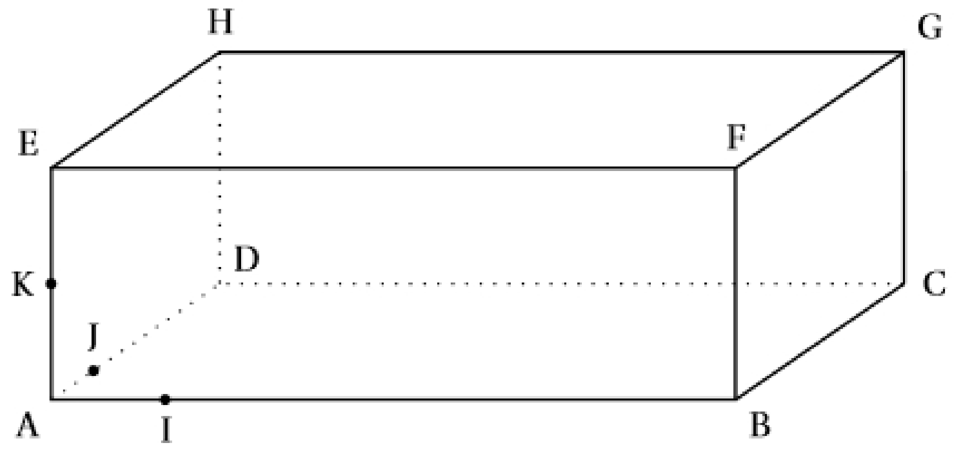
1. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF).
   On note H le point d'intersection du plan $\mathscr{P}$ et de la droite (DF).
   a. Donner les coordonnées des points D et F.
   b. Donner une représentation para métrique de la droite (DF).
   c. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.
   d. Calculer les coordonnées du point H.
   e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.
2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$.
   On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.
   Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.



VI. 7. Polynésie Juin 2015

On considère le pavé droit ABCDEFGH ci-dessous, pour lequel AB = 6, AD = 4 et AE = 2.

I, J et K sont les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



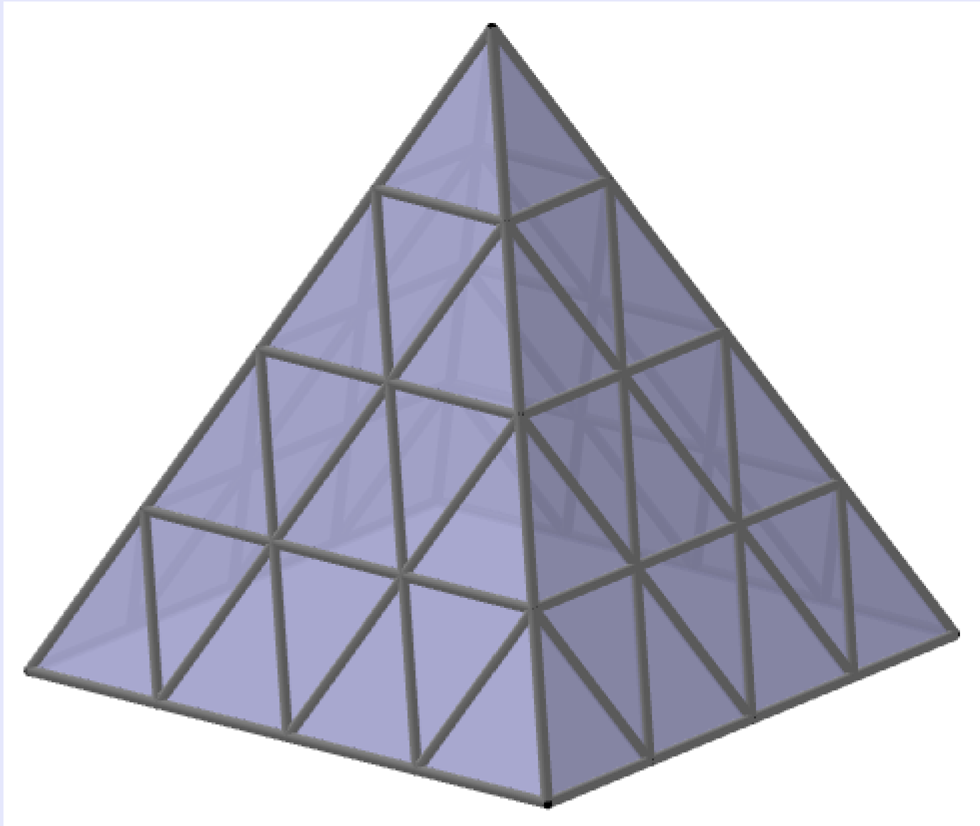
On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}\right)$.

1. Vérifier que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ est normal au plan (IJG).
2. Déterminer une équation du plan (IJG).
3. Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).
4. Tracer la section du pavé ABCDEFGH par le plan (IJG). Ce tracé sera réalisé sur la figure donnée en **annexe à rendre avec la copie**). On ne demande pas de justification.

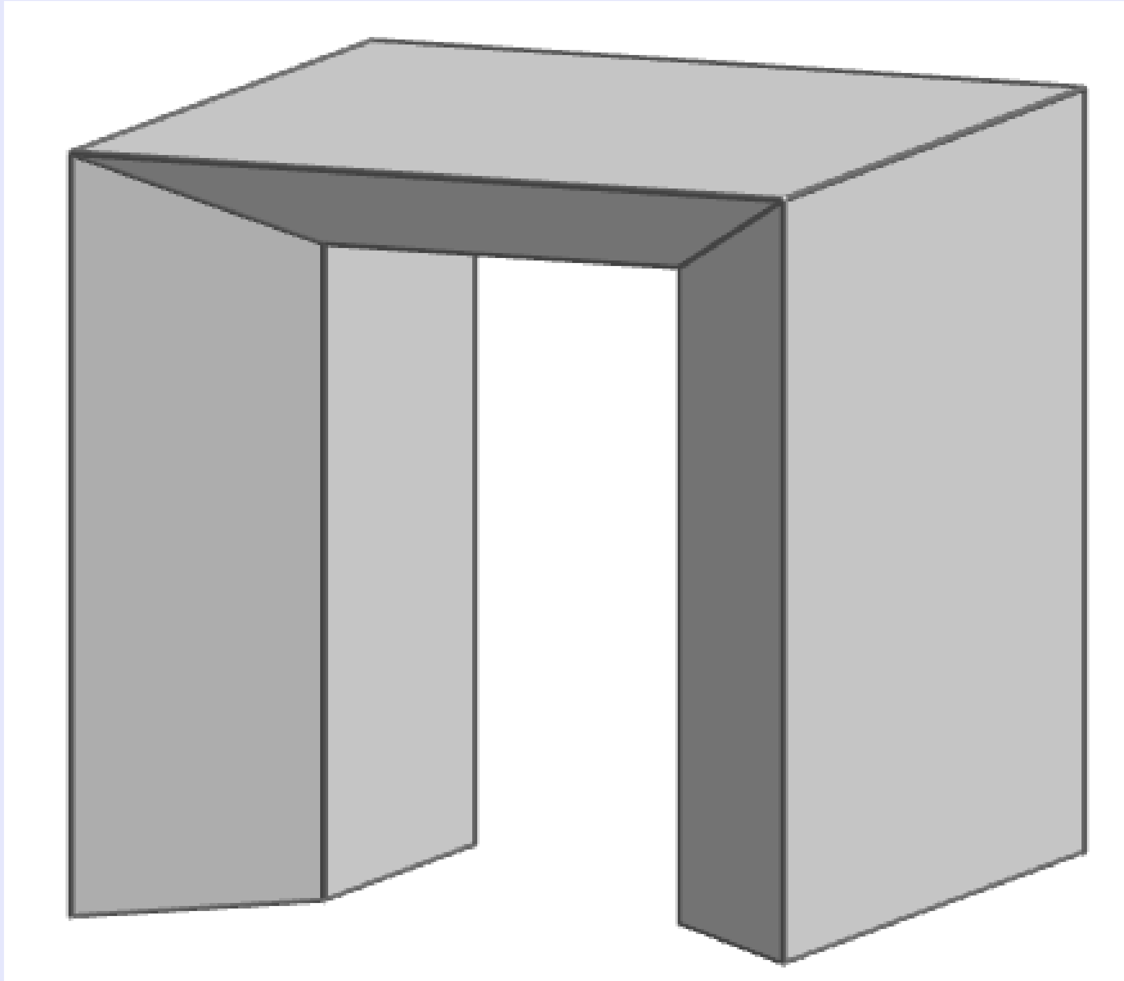
VII. Idées d'EPI ?

VII. 1. Architecture

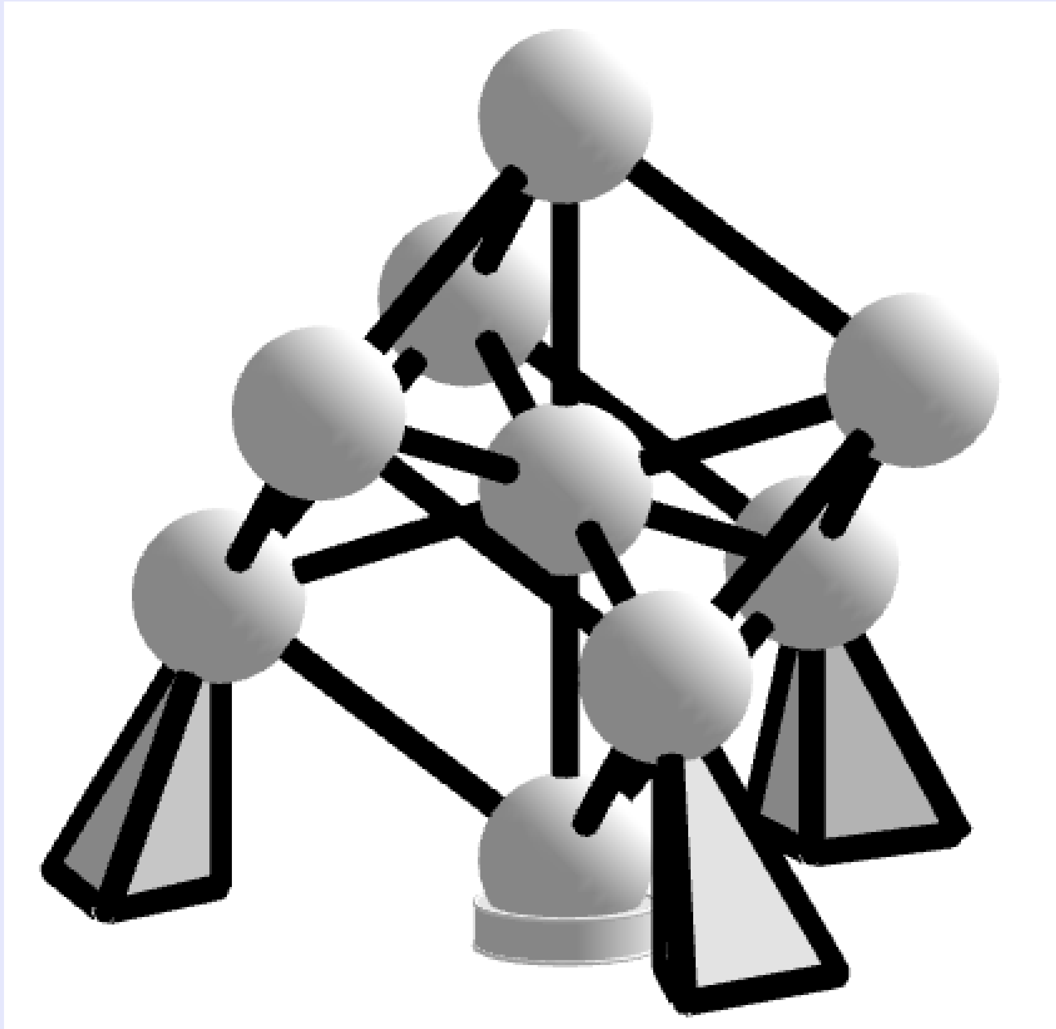
Pyramide du Louvre



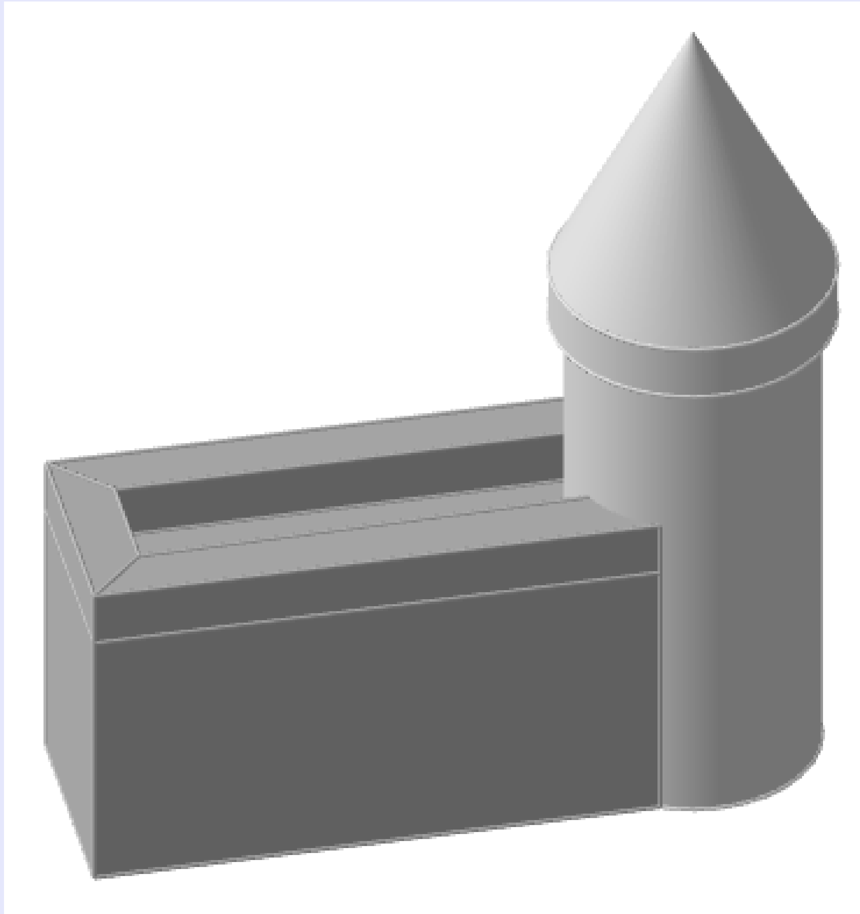
Arche de la Défense :



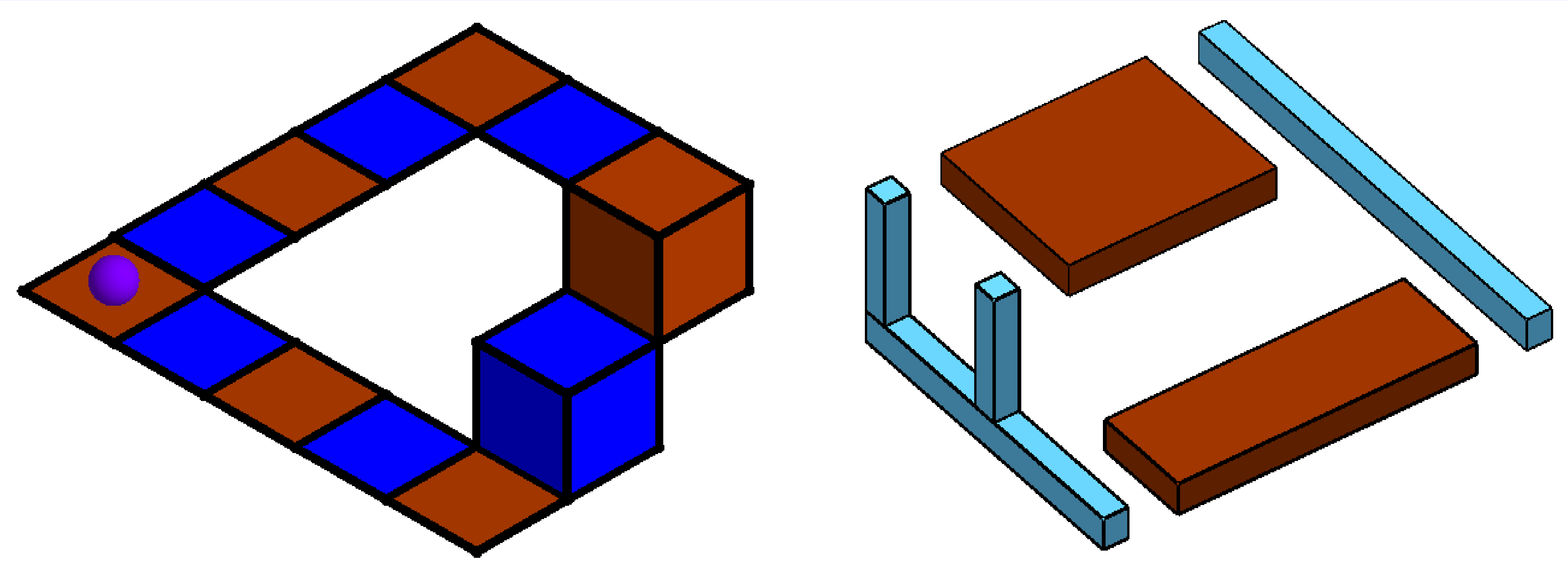
Atomium de Bruxelles



Un château



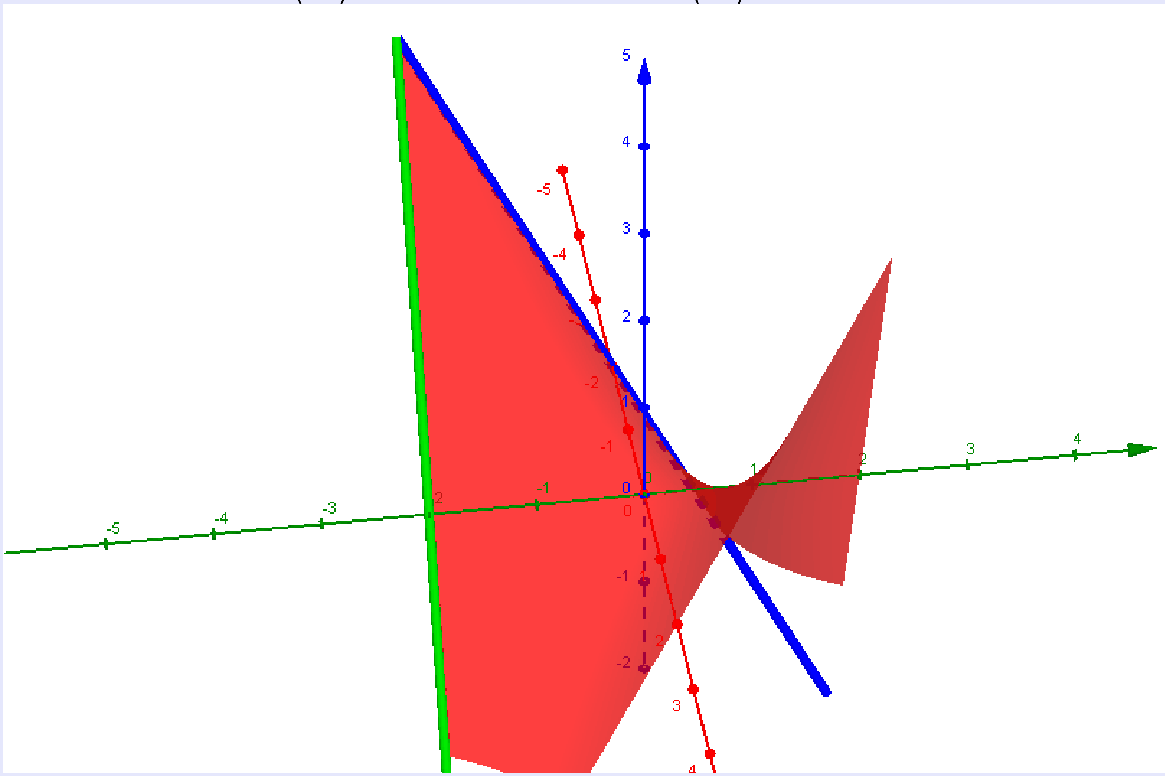
VII. 2. Illusions d'optique.



VII. 3. Surfaces réglées

Une surface est **réglée** si en tout point passe une droite.

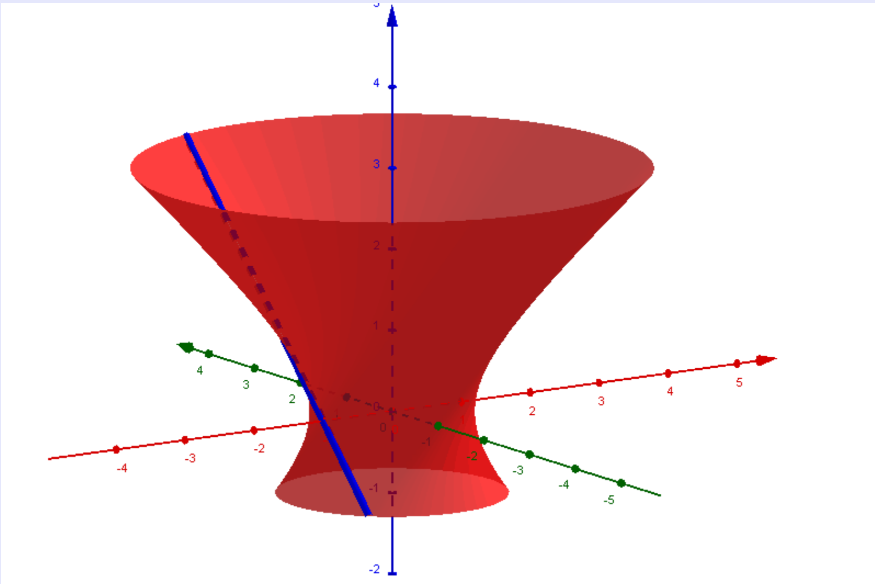
Exemple 1 : $S : z = x\,y$ est réglée car contient les droites qui passent par $A(u;0;0)$ (resp. $B(0;u;0)$) de vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$ (resp. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u \end{pmatrix}$).



Exemple 2 : Hyperboloïde à une nappe

$$S:\begin{cases} x=\cos(u)+v\sin(u) \\ y=\sin(u)-v\cos(u) \\ z=v \end{cases},u\in[0;2\pi],v\in\mathbb{R}$$

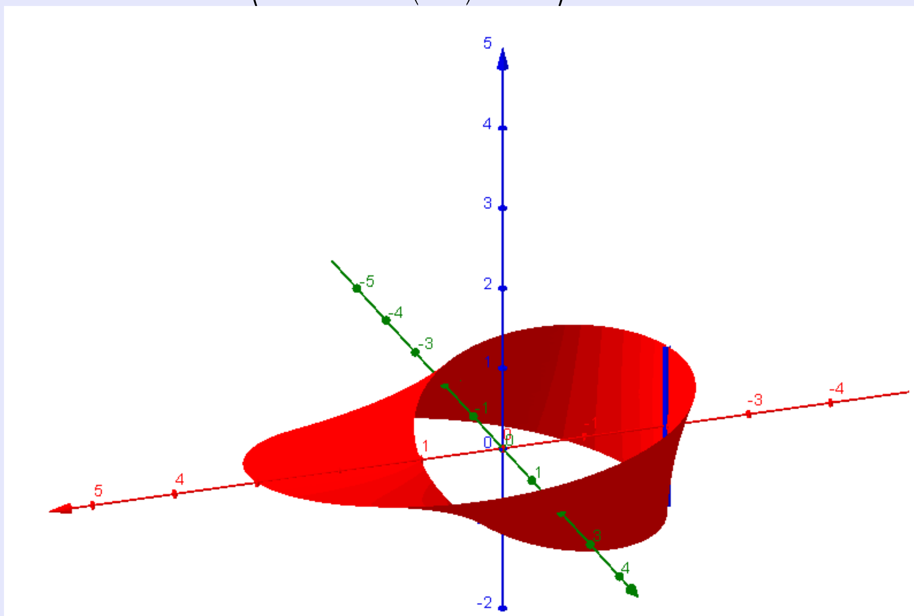
est réglée car contient les droites passant par $A(\cos(u),\sin(u),0)$ de vecteur directeurs $\begin{pmatrix} \sin(u) \\ -\cos(u) \\ 1 \end{pmatrix}$



Exemple 3 : Ruban de Moebius

$$S:\begin{cases} x=\left(2+u\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\cos(v) \\ y=\left(2+u\cos\left(\frac{v}{2}\right)\right)\sin(v) \\ z=u\sin\left(\frac{v}{2}\right) \end{cases},\ \begin{cases} u\in[-1;1] \\ v\in[-\pi;\pi] \end{cases}$$

est réglée car contient les droites passant par $A(2\cos(u),2\sin(u),0)$ de vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos(u) \\ \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin(u) \\ \sin\left(\frac{v}{2}\right) \end{pmatrix}$



Diaporama réalisé par LioNel PasCaud,
lycée Eugène Jamot, Aubusson.
lionel-yoann.pascaud@ac-limoges.fr

Merci à Noël Lambert pour ses remarques et corrections.

Tous les sujets d'annales sont extraits du site de l'APMEP.