Transformation de Laplace

Définition : La transformée de Laplace d'une fonction causale f continue par morceau est, si elle existe, la fonction F de la variable réelle ou complexe p définie par : $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt$

Notation et vocabulaire : Par abus de langage, on note $(\mathcal{L}f)(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ et f est appelée originale de F

Fonction	Transformée de Laplace
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{p^3}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{p}}$
$e^{-c.t}$	$\frac{1}{p+c}$
$t.e^{-c.t}$	$\frac{1}{(p+c)^2}$
$t^2.e^{-c.t}$	$\frac{2}{(p+c)^3}$
$t^n.e^{-c.t}$	$\frac{n!}{(p+c)^{n+1}}$
a^t	$\frac{1}{p-\ln a}$
$\sin a.t$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$t.\sin a.t$	$\frac{2a.p}{(p^2+a^2)^2}$
$t^2.\sin a.t$	$\frac{2a(3p^2-a^2)}{(p^2+a^2)^3}$
$\cos a.t$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$t.\cos a.t$	$\frac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$
$t^2.\cos a.t$	$\frac{2p(p^2-3a^2)}{(p^2+a^2)^3}$
$\sin(a.t+b)$	$\frac{a\cos b+p\sin b}{p^2+a^2}$
$\cos(a.t+b)$	$\frac{p.\cos b+a\sin b}{p^2+a^2}$

Transformée de Laplace	Fonction
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{\sqrt{p}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\frac{1}{\sqrt{p^3}}$	$2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$
$\frac{1}{p+a}$	$e^{-a.t}$
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-a.t})$
$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{e^{-a.t}}{a^2}+\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}$
$\frac{1}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{a}(1+t.e^{-a.t}-e^{-a.t})$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{e^{-b.t}-e^{-a.t}}{a-b}$
$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$	$\frac{ae^{-a.t}-be^{-b.t}}{a-b}$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)(p+c)}$	$\frac{e^{-a.t}}{(b-a)(c-a)}+\frac{e^{-b.t}}{(a-b)(c-b)}+\frac{e^{-c.t}}{(a-c)(b-c)}$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$t.e^{-a.t}$
$\frac{p}{(p+a)^2}$	$e^{-a.t}(1-a.t)$
$\frac{1}{(p+a)(p+b)^2}$	$\frac{e^{-a.t}-[1+(b-a)t]\,e^{-b.t}}{(b-a)^2}$
$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{1}{a.b}\left(1+\frac{b.e^{-a.t}-a.e^{-b.t}}{a-b}\right)$
$\frac{p+c}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{c}{a.b}+\frac{c-a}{a(a-b)}.e^{-a.t}+\frac{c-b}{b(b-a)}.e^{-b.t}$
$\frac{p^2+c.p+d}{p(p+a)(p+b)}$	$\frac{d}{a.b}+\frac{a^2-a.c+d}{a(a-b)}.e^{-a.t}+\frac{b^2-b.c+d}{b(b-a)}.e^{-b.t}$

Retard: $\alpha \in \mathbb{R}$, f retardée de α alors si $g(t) = f(t-\alpha) \Rightarrow G(p) = e^{-\alpha p}.F(p)$

Amorti: $\lambda \in \mathbb{R}$, f amortie de λ alors si $g(t) = e^{-\lambda p} f(t) \Rightarrow G(p) = F(p+\lambda)$

$\mathcal{L}[f(\alpha t)\,U(t)]$: $\alpha \in \mathbb{R}^{*+}$ alors si $h(t) = f(\alpha t) \Rightarrow H(p) = \frac{1}{\alpha}F(\frac{p}{\alpha})$

Dérivée: Si $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ alors $= \mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0^+)$ où $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$

Théorème de la valeur initiale : $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to+\infty} [p.F(p)]$ — Régime permanent

Théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} [p.F(p)]$ — et conditions initiales

(C.I.)**Primitive**: Si $F(p) = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\,dt\right]$ alors $= \mathcal{L}[F(t)] = \frac{F(p)}{p} - f(0^+)$ où $f(0^+) = \lim_{t\to 0^+} f(t)$