Vocabulaire des événements (Rappels)

• Dans une **expérience aléatoire**, l'**univers Ω** est l'ensemble de tous les résultats possibles.

• Un **événement** est une partie de l'univers.

• Un **événement élémentaire** est un événement possédant un seul élément.

• Deux événements A, B sont **disjoints** ou **incompatibles** si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

• L'**événement contraire** d'un événement A est l'**événement $\bar{A}$** constitué des éléments de Ω n'appartenant pas à A.

Calculs des probabilités (Rappels)

• La **probabilité de l'événement A** d'un univers fini Ω est la somme des probabilités des événements élémentaires qui constituent A. La probabilité de Ω est 1.

• Pour tout événement A, $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$.

• L'**équiprobabilité** correspond au cas où tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Dans ce cas, la probabilité d'un événement élémentaire est : $\dfrac{\mathbf{1}}{\textbf{nombre d'éléments de } \Omega}$

et pour tout événement A,

$$P(A) = \frac{\textbf{nombre d'éléments de } A}{\textbf{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\textbf{nombre de cas favorables}}{\textbf{nombres de cas possibles}}.$$

• Pour tous événements **disjoints** A, B,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B).$$

• Pour tout événement A,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \text{ En particulier } P(\varnothing) = 0.$$

• Pour tous événements A, B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Probabilités conditionnelles

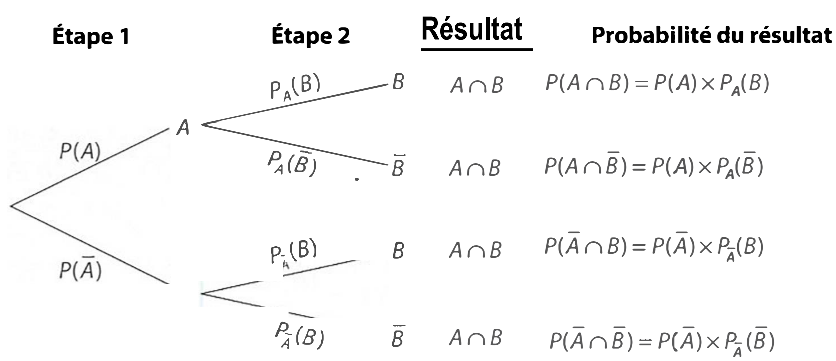
• $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$,

$P_A(B)$ est la probabilité de B sachant que A (est réalisé).

• Pour tous événements A et B de probabilités non nulles,

$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A) = P_B(A) \times P(B)$.

Arbre de probabilité



• **La probabilité d'un « résultat »** est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches qui conduisent à ce résultat.

• **La probabilité d'un événement** apparaissant à l'étape 2 est égale à la somme des probabilités des « résultats » dans lesquels cet événement figure.

Événements indépendants

• Deux événements A et B sont indépendants si et seulement si $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$ ou : $\boldsymbol{P_B(A) = P(A)}$.

Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli de paramètres *n* et *p*** est une épreuve aléatoire consistant à répéter n fois, de façon identique et indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

Loi binomiale

• Si n est un entier naturel et si k est un entier compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{k}$ et on lit « k parmi n » le nombre de chemins qui réalisent exactement k succès dans l'arbre à n niveaux associé à un schéma de Bernoulli. Ces nombres sont appelés **coefficients binomiaux**.

• La **loi binomiale de paramètres *n* et *p*** notée $\mathscr{B}(\boldsymbol{n, p})$ est la loi de la variable aléatoire X qui mesure le nombre de succès dans la répétition de façon identique et indépendante de n épreuves Bernoulli de paramètre p.

• Pour la variable aléatoire X qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, où n est un entier naturel et p un nombre réel de l'intervalle $[0, 1]$, on a pour tout entier k compris entre 0 et n :

$$\boldsymbol{P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}.$$

• **En BTS, on utilise une calculatrice ou un logiciel pour calculer directement $\boldsymbol{P(X = k)}$ ou $\boldsymbol{P(X \leq k)}$.**

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

• L'**espérance** de X est : $\boldsymbol{E(X) = np}$.

• La **variance** de X est : $\boldsymbol{V(X) = np(1-p)}$.

• L'**écart type** de X est : $\boldsymbol{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}}$.

Loi uniforme sur $[a, b]$

• La **fonction de densité** f est définie sur $[a, b]$ par $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{b-a}}$.

• Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[a, b]$.

Pour tout $[x_1, x_2]$ inclus dans $[a, b]$, $\boldsymbol{P(X \in [x_1, x_2]) = \dfrac{x_2 - x_1}{b-a}}$.

• L'**espérance** de X est $\boldsymbol{E(X) = \dfrac{a+b}{2}}$.

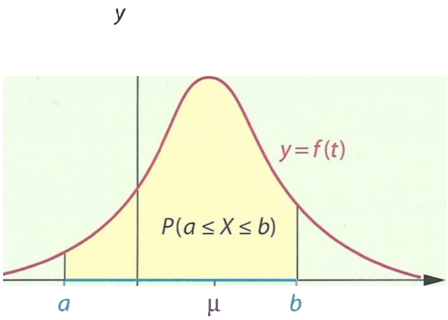
• La **variance** de X est $\boldsymbol{V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}}$.

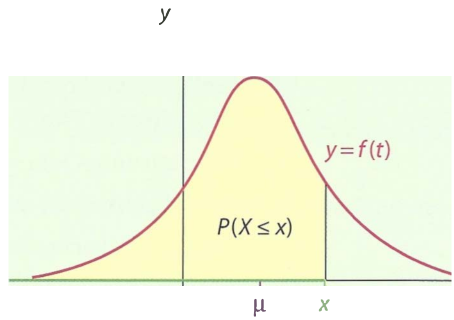
Loi normale

• La **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ **d'espérance ou de moyenne** μ **et d'écart type** σ est la loi à densité dont la **fonction de densité** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

• Soit X une variable aléatoire suivant la **loi normale** $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de fonction de densité f.





Les valeurs numériques de a, b et x étant données, on obtient les valeurs numériques de $P(a \leq X \leq b)$ ou $P(X \leq x)$ en utilisant une calculatrice ou un tableur et en remarquant, si nécessaire, que $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$.

• Si la variable aléatoire suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$,

$P(X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]) \approx \mathbf{0{,}68}$;

$P(X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]) \approx \mathbf{0{,}95}$;

$P(X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]) \approx \mathbf{0{,}997}$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Si n est « **grand** » et si p n'est « ni **trop voisin** de 0 ni **trop voisin** de 1 », alors la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ admet pour approximation la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ de **même espérance** et de **même écart type**

$\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Espérance et variance des lois de $aX + b$, $X + Y$, $X - Y$

• $E(aX + b) = a\,E(X) + b$;
$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$;
$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.

• $V(aX + b) = a^2 V(X)$;
$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes** ;
$V(X - Y) = V(X) - V(Y)$ si X et Y sont des variables aléatoires **indépendantes**.

• Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant les lois normales $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2)$, alors $X_1 + X_2$ suit la loi normale de moyenne $m_1 + m_2$ et d'écart type $\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.