Transformée de Laplace d'une fonction causale

Lycée La Fayette - BTS Électrotechnique (TS ET1A) - 2018 / 2019

Adapté par Christian, louis, MATHIEU

Formateur Mathématiques en lycée professionnel

I. Fonctions causales

I. Fonctions causales

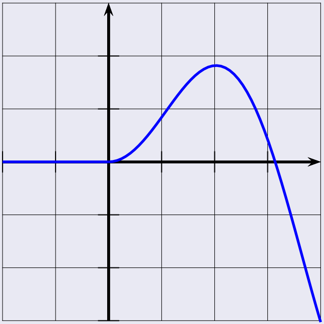
Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **causale** si $f(t) = 0$ pour $t < 0$.

I. Fonctions causales

Définition

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite **causale** si $f(t) = 0$ pour $t < 0$.



Fonction échelon-unité

La fonction causale la plus utilisée est la fonction **échelon-unité** ou fonction de **Heaviside** notée $\mathscr{U}$ définie par :

Fonction échelon-unité

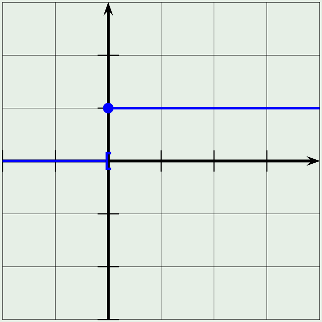
La fonction causale la plus utilisée est la fonction **échelon-unité** ou fonction de **Heaviside** notée $\mathscr{U}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Fonction échelon-unité

La fonction causale la plus utilisée est la fonction **échelon-unité** ou fonction de **Heaviside** notée $\mathscr{U}$ définie par :

$$\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$



Remarque

Si g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f définie par $f(t) = g(t)\mathscr{U}(t)$ est une fonction causale.

Remarque

Si g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f définie par $f(t) = g(t)\mathscr{U}(t)$ est une fonction causale.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(t) = \sin t.\mathscr{U}(t)$.

f est une fonction causale dont voici la courbe représentative :

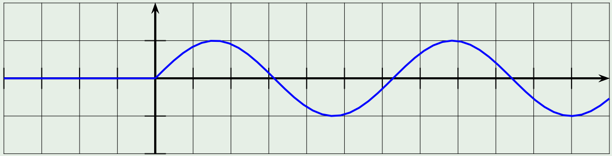
Remarque

Si g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ alors la fonction f définie par $f(t) = g(t)\mathscr{U}(t)$ est une fonction causale.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(t) = \sin t.\mathscr{U}(t)$.

f est une fonction causale dont voici la courbe représentative :

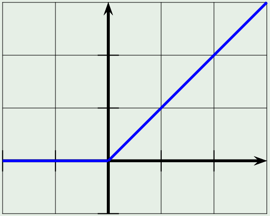


Fonction rampe-unité

La fonction **rampe-unité** est la fonction $t \mapsto t\mathscr{U}(t)$.

Fonction rampe-unité

La fonction **rampe-unité** est la fonction $t \mapsto t\mathscr{U}(t)$.



Fonction avancée ou retardée

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

Fonction avancée ou retardée

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto f(t+a)$ est dite **avancée** de a.

Fonction avancée ou retardée

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto f(t+a)$ est dite **avancée** de a.
- La fonction $t \mapsto f(t-a)$ est dite **retardée** de a.

Fonction avancée ou retardée

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto f(t+a)$ est dite **avancée** de a.
- La fonction $t \mapsto f(t-a)$ est dite **retardée** de a.

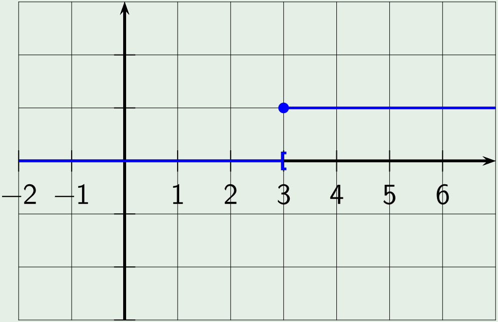
Par exemple, la fonction échelon retardée de 3 est la fonction $t \mapsto \mathscr{U}(t-3)$, voici sa représentation graphique :

Fonction avancée ou retardée

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto f(t+a)$ est dite **avancée** de a.
- La fonction $t \mapsto f(t-a)$ est dite **retardée** de a.

Par exemple, la fonction échelon retardée de 3 est la fonction $t \mapsto \mathscr{U}(t-3)$, voici sa représentation graphique :



Fonction créneau

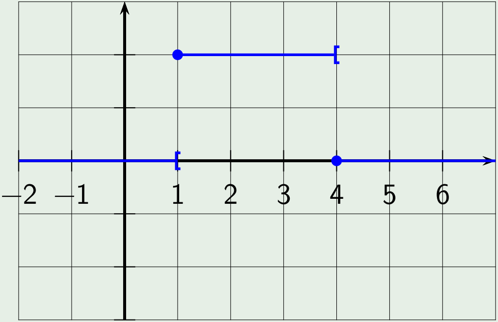
Une fonction créneau est une fonction nulle partout sauf sur un intervalle sur lequel elle est constante.

Fonction créneau

Une fonction créneau est une fonction nulle partout sauf sur un intervalle sur lequel elle est constante.
Par exemple, la fonction $t \mapsto 2[\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-4)]$ est une fonction créneau dont voici la courbe représentative :

Fonction créneau

Une fonction créneau est une fonction nulle partout sauf sur un intervalle sur lequel elle est constante.
Par exemple, la fonction $t \mapsto 2[\mathscr{U}(t-1) - \mathscr{U}(t-4)]$ est une fonction créneau dont voici la courbe représentative :



II. Intégrales généralisées

II. Intégrales généralisées

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a, +\infty[$.

II. Intégrales généralisées

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a, +\infty[$.

- Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \int_a^x f(t)dt$ est un réel A,

II. Intégrales généralisées

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a, +\infty[$.

- Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \int_a^x f(t)dt$ est un réel A, alors on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge

II. Intégrales généralisées

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a, +\infty[$.

- Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \int_a^x f(t)dt$ est un réel A, alors on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a $\int_a^{+\infty} f(t)dt = A$.

II. Intégrales généralisées

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a, +\infty[$.

- Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est un réel A, alors on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = A$.
- Si une intégrale ne converge pas alors on dit qu'elle diverge.

II. Intégrales généralisées

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a, +\infty[$.

- Si $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \int_a^x f(t)dt$ est un réel A, alors on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge et on a $\int_a^{+\infty} f(t)dt = A$.
- Si une intégrale ne converge pas alors on dit qu'elle diverge.

Remarque

Les propriétés connues de l'intégrale restent valables pour les intégrales généralisées.

Exemple 1

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$.

Exemple 1

Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$.

- $\int_1^x \frac{1}{t} \mathrm{d}t =$

Exemple 1

Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$.

- $\int_1^{x} \frac{1}{t} dt = \left[\ln t\right]_1^{x} =$

Exemple 1

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$.

- $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln t\Big]_1^x = \ln x - \ln 1 =$

Exemple 1

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$.

- $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln t\Big]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x.$

Exemple 1

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$.

- $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t} dt = \Big[\ln t\Big]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$.
- Or $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \ln x =$

Exemple 1

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$.

- $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln t\Big]_1^{x} = \ln x - \ln 1 = \ln x$.
- Or $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \ln x = +\infty$.

Exemple 1

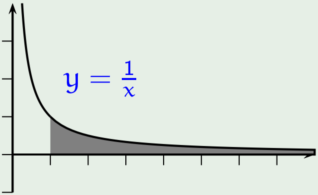
Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$.

- $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t}\,dt = \Big[\ln t\Big]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x.$
- Or $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \ln x = +\infty.$
- Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge.

Exemple 1

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$.

- $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln t\right]_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x$.
- Or $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \ln x = +\infty$.
- Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ diverge.



Exemple 2

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

- $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t^2}\,dt =$

Exemple 2

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

- $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x =$

Exemple 2

Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

- $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$

Exemple 2

Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

- $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$
- Or $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) =$

Exemple 2

Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

- $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$
- Or $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = 1.$

Exemple 2

Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

- $\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$
- Or $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = 1.$
- Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge

Exemple 2

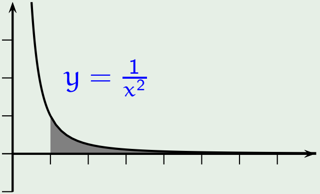
Etudions la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

- $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$
- Or $\lim_{x \mapsto +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = 1.$
- Donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1.$

Exemple 2

Etudions la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$.

- $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = -\frac{1}{x} + 1.$
- Or $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \left(-\frac{1}{x} + 1\right) = 1.$
- Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1.$



III. Transformée de Laplace

III. Transformée de Laplace

Définition

La transformée de Laplace d'une fonction causale f est la fonction $\mathscr{L}_f$ de la variable réelle p définie par :

III. Transformée de Laplace

Définition

La transformée de Laplace d'une fonction causale f est la fonction $\mathscr{L}_f$ de la variable réelle p définie par :

$$\boxed{\mathscr{L}_f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)dt}$$

III. Transformée de Laplace

Définition

La transformée de Laplace d'une fonction causale f est la fonction $\mathscr{L}_f$ de la variable réelle p définie par :

$$\boxed{\mathscr{L}_f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt}$$

Remarques

- La transformée de Laplace de f existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ converge.

III. Transformée de Laplace

Définition

La transformée de Laplace d'une fonction causale f est la fonction $\mathscr{L}_f$ de la variable réelle p définie par :

$$\boxed{\mathscr{L}_f(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt}$$

Remarques

- La transformée de Laplace de f existe si et seulement si $\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$ converge.
- On note parfois $F(p)$ ou $\mathscr{L}[f(t)](p)$ au lieu de $\mathscr{L}_f(p)$.

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt =$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt =$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x =$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x = \frac{1}{p}(-e^{-px}+1).$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x = \frac{1}{p}(-e^{-px}+1).$
- Or p étant strictement positif :

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x = \frac{1}{p}(-e^{-px}+1).$
- Or p étant strictement positif : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{p}(-e^{-px}+1) =$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x = \frac{1}{p}(-e^{-px}+1).$
- Or p étant strictement positif : $\displaystyle\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{1}{p}(-e^{-px}+1) = \frac{1}{p}.$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x = \frac{1}{p}(-e^{-px}+1).$
- Or p étant strictement positif : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{p}(-e^{-px}+1) = \frac{1}{p}.$
- On a donc

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x = \frac{1}{p}(-e^{-px}+1).$
- Or p étant strictement positif : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{p}(-e^{-px}+1) = \frac{1}{p}.$
- On a donc $\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) =$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x = \frac{1}{p}(-e^{-px}+1).$
- Or p étant strictement positif : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{p}(-e^{-px}+1) = \frac{1}{p}.$
- On a donc $\displaystyle\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\mathscr{U}(t)dt =$

IV. Transformée de Laplace des fonctions usuelles

Fonction de Heaviside

La transformée de Laplace de la fonction de Heaviside est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p}}$$

Démonstration :

- $\displaystyle\int_0^x \mathscr{U}(t)e^{-pt}dt = \int_0^x e^{-pt}dt = \left[-\frac{1}{p}e^{-pt}\right]_0^x = \frac{1}{p}(-e^{-px}+1).$
- Or p étant strictement positif : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{p}(-e^{-px}+1) = \frac{1}{p}.$
- On a donc $\displaystyle\mathscr{L}[\mathscr{U}(t)](p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\mathscr{U}(t)dt = \frac{1}{p}.$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)\,dt$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)\,dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}\,dt$.

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)\,dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}\,dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)\,dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}\,dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\int_0^x te^{-pt}\,dt = \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}\,dt$$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)\,dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}\,dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-pt}\,dt &= \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}\,dt \\ &= \left[t\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x \end{aligned}$$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)\,dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}\,dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x te^{-pt}\,dt &= \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}\,dt \\
&= \left[t\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x \\
&= \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{-e^{-px}}{p^2} + \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-pt}dt &= \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}dt \\ &= \left[t\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x \\ &= \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{-e^{-px}}{p^2} + \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

- Or $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{-xe^{-px}}{p} =$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x te^{-pt}dt &= \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}dt \\
&= \left[t\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x \\
&= \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{-e^{-px}}{p^2} + \frac{1}{p^2}
\end{aligned}$$

- Or $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{-xe^{-px}}{p} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{-e^{-px}}{p^2} =$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)\,dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}\,dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-pt}\,dt &= \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}\,dt \\ &= \left[t\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x \\ &= \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{-e^{-px}}{p^2} + \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

- Or $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{-xe^{-px}}{p} = \lim\limits_{x \mapsto +\infty} \frac{-e^{-px}}{p^2} = 0.$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-pt}dt &= \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}dt \\ &= \left[t\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x \\ &= \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{-e^{-px}}{p^2} + \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

- Or $\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{-xe^{-px}}{p} = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{-e^{-px}}{p^2} = 0.$
- On a donc $\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) =$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)\,dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}\,dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-pt}\,dt &= \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}\,dt \\ &= \left[t\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x \\ &= \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{-e^{-px}}{p^2} + \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

- Or $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{-xe^{-px}}{p} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{-e^{-px}}{p^2} = 0$.
- On a donc $\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathscr{U}(t)\,dt =$

Fonction rampe

La transformée de Laplace de la fonction rampe est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p^2}}$$

Démonstration :

- Il s'agit de calculer $\int_0^x e^{-pt} t\mathscr{U}(t)dt$ soit $\int_0^x te^{-pt}dt$.
- On effectue une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = t \text{ et donc } u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-pt} \text{ et donc } v(t) = -\frac{1}{p}e^{-pt} \end{cases}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x te^{-pt}dt &= \left[-\frac{1}{p}te^{-pt}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{p}e^{-pt}dt \\ &= \left[t\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x + \frac{1}{p}\left[\frac{-e^{-pt}}{p}\right]_0^x \\ &= \frac{-xe^{-px}}{p} + \frac{-e^{-px}}{p^2} + \frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

- Or $\lim_{x \mapsto +\infty} \frac{-xe^{-px}}{p} = \lim_{x \mapsto +\infty} \frac{-e^{-px}}{p^2} = 0$.
- On a donc $\mathscr{L}[t\mathscr{U}(t)](p) = \int_0^{+\infty} te^{-pt}\mathscr{U}(t)dt = \frac{1}{p^2}$.

Fonction $t \mapsto t^n \mathscr{U}(t)$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^n \mathscr{U}(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est définie pour $p > 0$ et on a :

Fonction $t \mapsto t^n \mathscr{U}(t)$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^n \mathscr{U}(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t^n \mathscr{U}(t)](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

Fonction $t \mapsto t^n \mathscr{U}(t)$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^n \mathscr{U}(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t^n \mathscr{U}(t)](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

Fonction $t \mapsto e^{-at} \mathscr{U}(t)$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e^{-at} \mathscr{U}(t)$ est définie pour $p > a$ et on a :

Fonction $t \mapsto t^n \mathscr{U}(t)$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto t^n \mathscr{U}(t)$ pour $n \in \mathbb{N}$ est définie pour $p > 0$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[t^n \mathscr{U}(t)](p) = \frac{n!}{p^{n+1}}}$$

Fonction $t \mapsto e^{-at} \mathscr{U}(t)$

La transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto e^{-at} \mathscr{U}(t)$ est définie pour $p > a$ et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[e^{-at} \mathscr{U}(t)](p) = \frac{1}{p+a}}$$

Fonction sinus

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t)\mathscr{U}(t)$ existe et on a :

Fonction sinus

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t)\mathscr{U}(t)$ existe et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\sin(\omega t)\mathscr{U}(t)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

Fonction sinus

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t)\mathscr{U}(t)$ existe et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\sin(\omega t)\mathscr{U}(t)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

Fonction cosinus

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \cos(\omega t)\mathscr{U}(t)$ existe et on a :

Fonction sinus

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \sin(\omega t)\mathscr{U}(t)$ existe et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\sin(\omega t)\mathscr{U}(t)](p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}}$$

Fonction cosinus

Soit $\omega \in \mathbb{R}$, la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto \cos(\omega t)\mathscr{U}(t)$ existe et on a :

$$\boxed{\mathscr{L}[\cos(\omega t)\mathscr{U}(t)](p) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}}$$