

THÈME:

Calcul intégral

OBJECTIFS DE L'ACTIVITÉ :

- Approche **numérique** et **graphique** d'une **valeur moyenne** d'une fonction sur un intervalle.
- Utilisation d'un **logiciel de calcul formel** et d'un **logiciel de géométrie dynamique**.
- Utilisation de la **calculatrice** pour vérifier les résultats en appliquant **la relation de Chasles**.

PRÉREQUIS NÉCESSAIRES :

- **Fonctions périodiques**.
- **Calcul intégral** et **propriétés** de l'intégrale.
- Connaissances de base d'un **logiciel de calcul formel** et d'un **logiciel de géométrie dynamique**.

COMPÉTENCES VISÉES :

- **Raisonner, vérifier** la cohérence d'un résultat avec la calculatrice, avec une représentation graphique
- **S'approprier** un logiciel de calcul formel et de géométrie dynamique.

CAPACITÉS DU PROGRAMME TRAVAILLÉES :

- **Approche numérique et graphique d'une valeur moyenne** d'une fonction sur un intervalle.
- **Relation de Chasles de l'intégrale**
- Savoir **utiliser la calculatrice** pour vérifier le calcul d'une intégrale.

OUTILS :

- Utilisation d'un **logiciel de calcul formel** et d'un **logiciel de géométrie dynamique**.
- Utilisation de la **calculatrice**

APPROFONDISSEMENTS OU MODIFICATIONS POSSIBLES :

Partie D et E (Démonstration de la formule de la tension efficace en fonction de $u(t)$.)

SCÉNARIO PÉDAGOGIQUE, TEMPS ESTIMÉ :

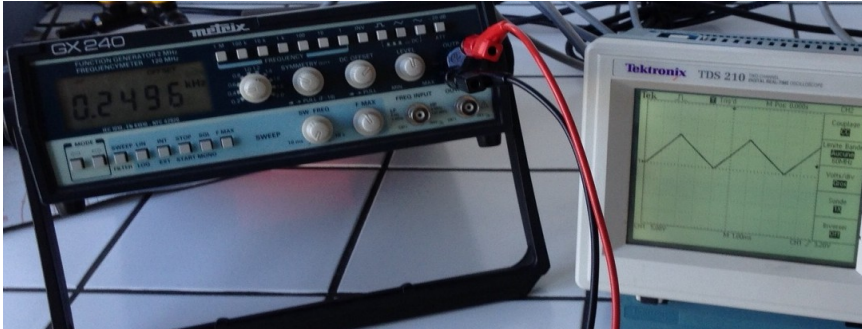
- Séance d'une heure en salle informatique.
- Les élèves travaillent par groupe de 4. **Après avoir traité la partie A, ils se répartissent la partie B et la partie C.** Restitution au groupe des 4, mise en commun des méthodes utilisées.
Approfondissement fin d'année : Résolution de la partie D et E par l'ensemble du groupe.
- Une fiche d'instructions des logiciels pouvant être utilisés sera distribuée et/ou accès internet (www.e-bacpro.fr sur **Menu BTS > Mathématiques**).

ÉTUDE D'UNE TENSION PÉRIODIQUE

On appelle $u(t)$ la tension en volts en fonction du temps t (en ms).

Étudions la **valeur moyenne** $\langle u(t) \rangle$ et la **valeur efficace** U de cette tension $u(t)$ sur une période.

La valeur efficace d'une tension périodique est la tension continue constante qui dissiperait la même puissance qu'un dipôle purement résistif. En Physique, on mesure **la valeur moyenne** $\langle u(t) \rangle$ à l'aide d'un voltmètre en **position DC**, et la **valeur efficace** U à l'aide d'un voltmètre en position DC+AC



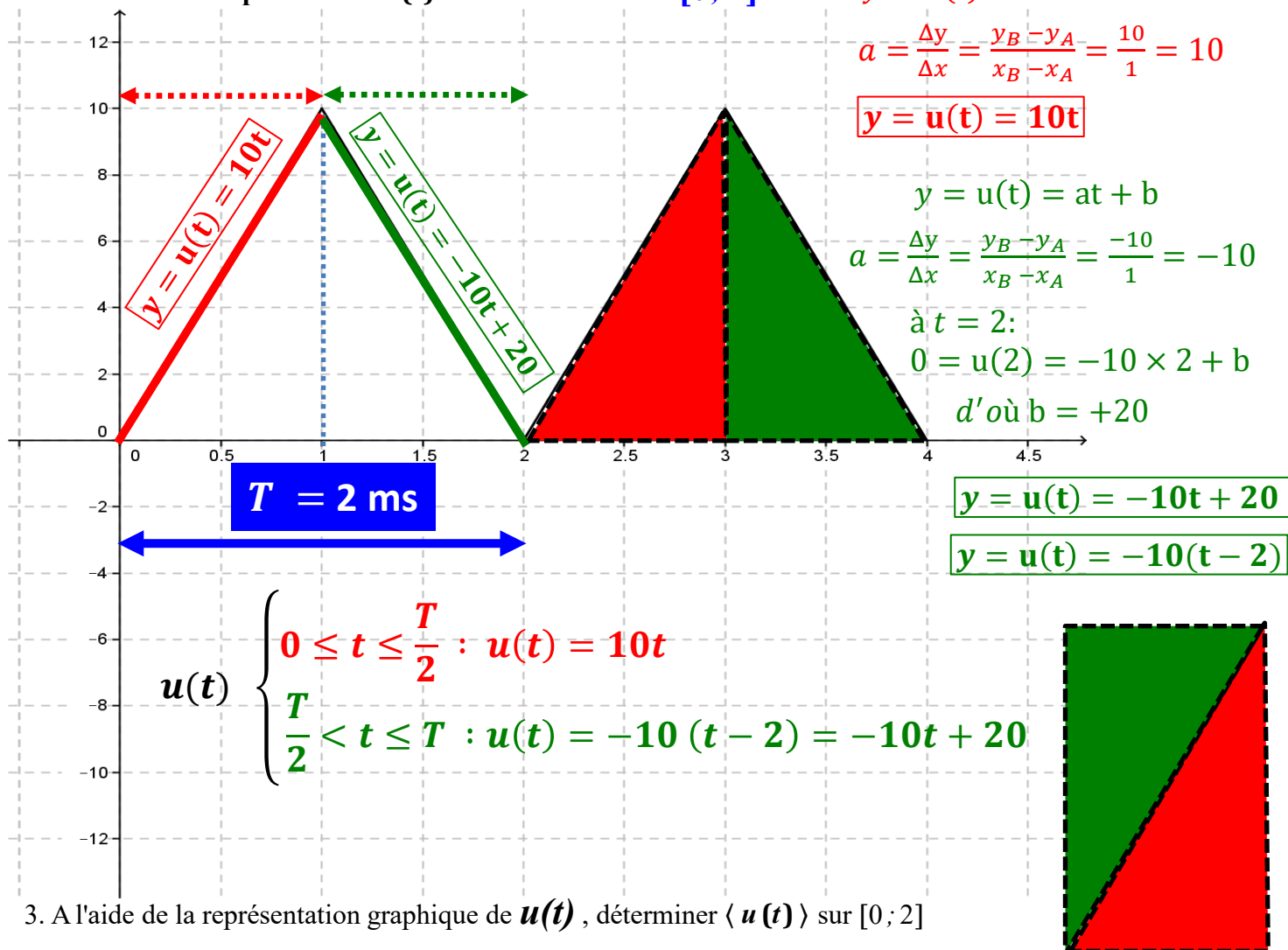
Courant Continu CC
ou
DC pour **Direct Current** en anglais

courant alternatif CA
ou
AC pour **Alternating Current** en anglais

Partie A : Lectures graphiques

Le montage ci-dessus nous permet d'avoir le signal $u(t)$ représenté ci-dessous :

- Déterminer la **période** T de $u(t)$.
- Déterminer l'expression de $u(t)$ en fonction de t sur $[0; T]$



- A l'aide de la représentation graphique de $u(t)$, déterminer $\langle u(t) \rangle$ sur $[0; 2]$

Graphiquement $\langle u(t) \rangle$: **Valeur moyenne de $u(t)$ est égale à $\frac{1 \times 10}{2} = \frac{10}{2} = 5$**

Partie B : Par calcul

Soit $u(t)$ le signal périodique de période $T=2$ ms tel que
$$\begin{cases} u(t) = 10t & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ u(t) = -10t + 20 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

La valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ sur $[0; T]$ est donnée par $\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$

et la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0; T]$ est donnée par $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$

1. En utilisant un logiciel si besoin, calculer la valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ sur $[0; 2]$.

2. En utilisant un logiciel , calculer la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0; 2]$.

3. Vérifier vos résultats à l'aide de votre calculatrice.

$$u(t) \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{T}{2} : u(t) = 10t \\ \frac{T}{2} < t \leq T : u(t) = -10(t - 2) = -10t + 20 \end{cases}$$

Méthode: Calcul numérique à la main de la valeur moyenne

$$\text{Valeur moyenne} = \langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T u(t) dt}_{\text{Calculons la partie: } \int_0^T u(t) dt :}$$

puis utilisons la propriété de l'intégrale : la relation de Chasles

Soit f continue sur I , trois réels a , b et c quelconques de l'intervalle I ,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

$$\int_0^T u(t) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} u(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T u(t) dt$$

$$\int_0^T u(t) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} 10t dt + \int_{\frac{T}{2}}^T -10t + 20 dt \quad \text{avec } T = 2$$

$$\int_0^2 u(t) dt = \left[\frac{10t^2}{2} \right]_0^1 + \left[-\frac{10t^2}{2} + 20t \right]_1^2$$

$$\int_0^2 u(t) dt = \left[\frac{10 \times 1^2}{2} - \frac{10 \times 0^2}{2} \right] + \left[\left(-\frac{10 \times 2^2}{2} + 20 \times 2 \right) - \left(-\frac{10 \times 1^2}{2} + 20 \times 1 \right) \right]$$

$$\int_0^2 u(t) dt = [5] + [(20) - (15)] = 10$$

$$\int_0^2 u(t) dt = 10$$

Réintégrons le résultat dans l'expression de la valeur moyenne

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^2 u(t) dt = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

$$\langle u(t) \rangle = 5$$

Soit $u(t)$ le signal périodique de période $T = 2$ ms tel que
$$\begin{cases} u(t) = 10t & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ u(t) = -10t + 20 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

La valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ sur $[0; T]$ est donnée par $\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$

et la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0; T]$ est donnée par $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$

1. En utilisant un logiciel si besoin, calculer la valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ sur $[0; 2]$.

2. En utilisant un logiciel, calculer la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0; 2]$.

3. Vérifier vos résultats à l'aide de votre calculatrice.

$$u(t) \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{T}{2} : u(t) = 10t \\ \frac{T}{2} < t \leq T : u(t) = -10(t - 2) = -10t + 20 \end{cases}$$

Méthode: Calcul numérique à la main

Valeur efficace $U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$ Calculons la partie : $\int_0^T u^2(t) dt$

$$\int_0^T u^2(t) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} u^2(t) dt + \int_{\frac{T}{2}}^T u^2(t) dt$$

D'après la relation de Chasles :

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx$$

$$\int_0^T u^2(t) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} (10t)^2 dt + \int_{\frac{T}{2}}^T (-10t + 20)^2 dt \text{ avec } T = 2 \text{ et } \frac{T}{2} = 1$$

$$\int_0^T u^2(t) dt = \int_0^1 100t^2 dt + \int_1^2 (-10(t - 2))^2 dt = \int_0^1 100t^2 dt + \int_1^2 100(t - 2)^2 dt$$

$$\int_0^T u^2(t) dt = 100 \int_0^1 t^2 dt + 100 \int_1^2 (t - 2)^2 dt$$

$$\int_0^T u^2(t) dt = 100 \int_0^1 t^2 dt + 100 \int_1^2 (t - 2)^2 dt = 100 \int_0^1 t^2 dt + 100 \int_1^2 (t^2 - 4t + 4) dt$$

$$\int_0^2 u^2(t) dt = 100 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 + 100 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{4t^2}{2} + 4t \right]_1^2$$

$$\int_0^2 u^2(t) dt = 100 \left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right] + 100 \left[\left(\frac{2^3}{3} - \frac{4 \times 2^2}{2} + 4 \times 2 \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{4 \times 1^2}{2} + 4 \times 1 \right) \right]$$

$$\int_0^2 u^2(t) dt = \frac{100}{3} + 100 \left[\left(+\frac{8}{3} \right) - \left(+\frac{1}{3} + 2 \right) \right] = \frac{100}{3} + 100 \left[\left(+\frac{8}{3} \right) - \left(+\frac{7}{3} \right) \right]$$

$$\int_0^2 u^2(t) dt = \frac{100}{3} + 100 \left[\left(+\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{100}{3} + 100 \left[\left(+\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{100}{3} + \frac{100}{3} = 100 \times \frac{2}{3}$$

En reportant dans U_{eff}^2 : $U_{eff}^2 = \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{2} \times 100 \times \frac{2}{3} = \frac{100}{3} = \frac{10^2}{3}$

On obtient : $U_{eff}^2 = \frac{10^2}{3}$ soit $U_{eff} = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$$U_{eff} = \frac{10}{1,732} \cong 5,77$$

Soit $u(t)$ le signal périodique de période $T=2$ ms tel que
$$\begin{cases} u(t) = 10t & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ u(t) = -10t + 20 & \text{si } 1 < t \leq 2 \end{cases}$$

La valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ sur $[0; T]$ est donnée par $\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$

et la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0; T]$ est donnée par $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$

1. En utilisant un logiciel si besoin, calculer la valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ sur $[0; 2]$.
2. En utilisant un logiciel, calculer la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0; 2]$.
3. Vérifier vos résultats à l'aide de votre calculatrice.

$$u(t) = \begin{cases} 0 \leq t \leq \frac{T}{2} : u(t) = 10t \\ \frac{T}{2} < t \leq T : u(t) = -10(t - 2) = -10t + 20 \end{cases}$$

Valeur moyenne

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Valeur efficace

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

Usage calculatrices

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

TICE

Usage calculatrices

CASIO / TI / NumWorks

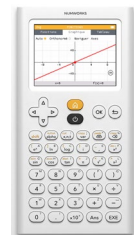
Vidéos de calcul intégral avec calculatrices

Collaboration et réalisation par Elias Berrabah Professeur agrégé de Mathématiques (le samedi 20 mars 2021)

Cliquez  <http://www.e-bacpro.fr/pages/technicien-superieur/mathematiques-en-bts.html>

- CASIO** → [Calculatrice partie casio](#) (10.81 Mo)
- TI** → [Calculatrice partie TI](#) (6.13 Mo)
- Numwork** → [Calculatrice partie numworks](#) (6.28 Mo)

EMULATEUR > <https://www.numworks.com/fr/simulateur/>



[Dérivation - Intégration](#)

CASIO

Touche **OPTN** puis instruction **CALC** (touche **F4**)

Syntaxe de l'instruction **d/dx** (touche **F2**) :

d/dx(expression, valeur).

La fonction **Y1** est obtenue par la touche **VARS** puis l'instruction

GRPH

Touche **OPTN** puis instruction **CALC** (touche **F2**)

Syntaxe de l'instruction **∫ dx** (touche **F2**)

∫ dx(expression, borne inf, borne sup).

TICE / Calculatrices / Fonctionnalités

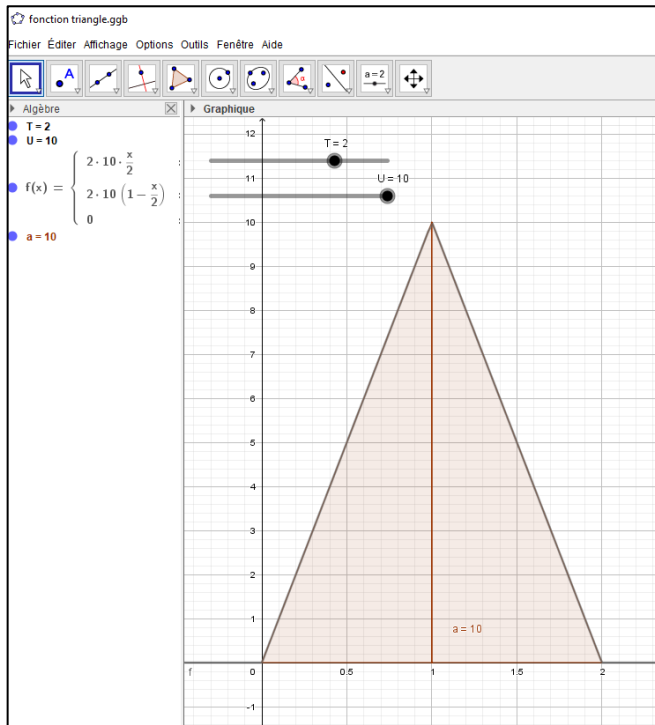
> <http://www.e-bacpro.fr/pages/tic/tic.html>

Partie C : A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique

1. A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, tracer la représentation graphique de $u(t)$ sur $[0; 2]$.
2. En déduire la valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ sur $[0; 2]$.
3. Calculer la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0; 2]$.

GEOGEBRA > ZONE DE SAISIE :

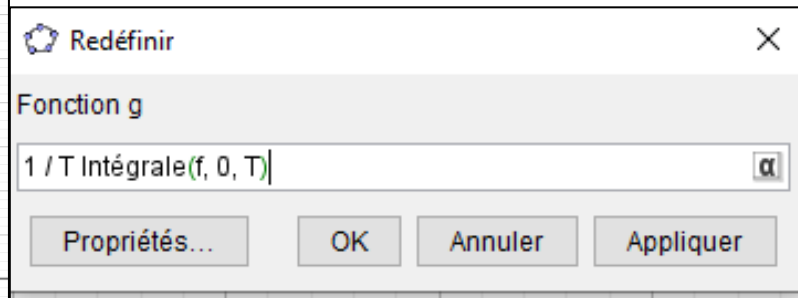
Si $[x > 0 \wedge x < T / 2, 2 U x / T, \text{Si}[x > T / 2 \wedge x < T, 2 U (1 - x / T), 0]]$



Valeur moyenne

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

Saisie: $g(x) = (1/T) * \text{Intégrale}(\text{<Fonction>, <x min>, <x max>})$



Valeur efficace

$$U_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$$

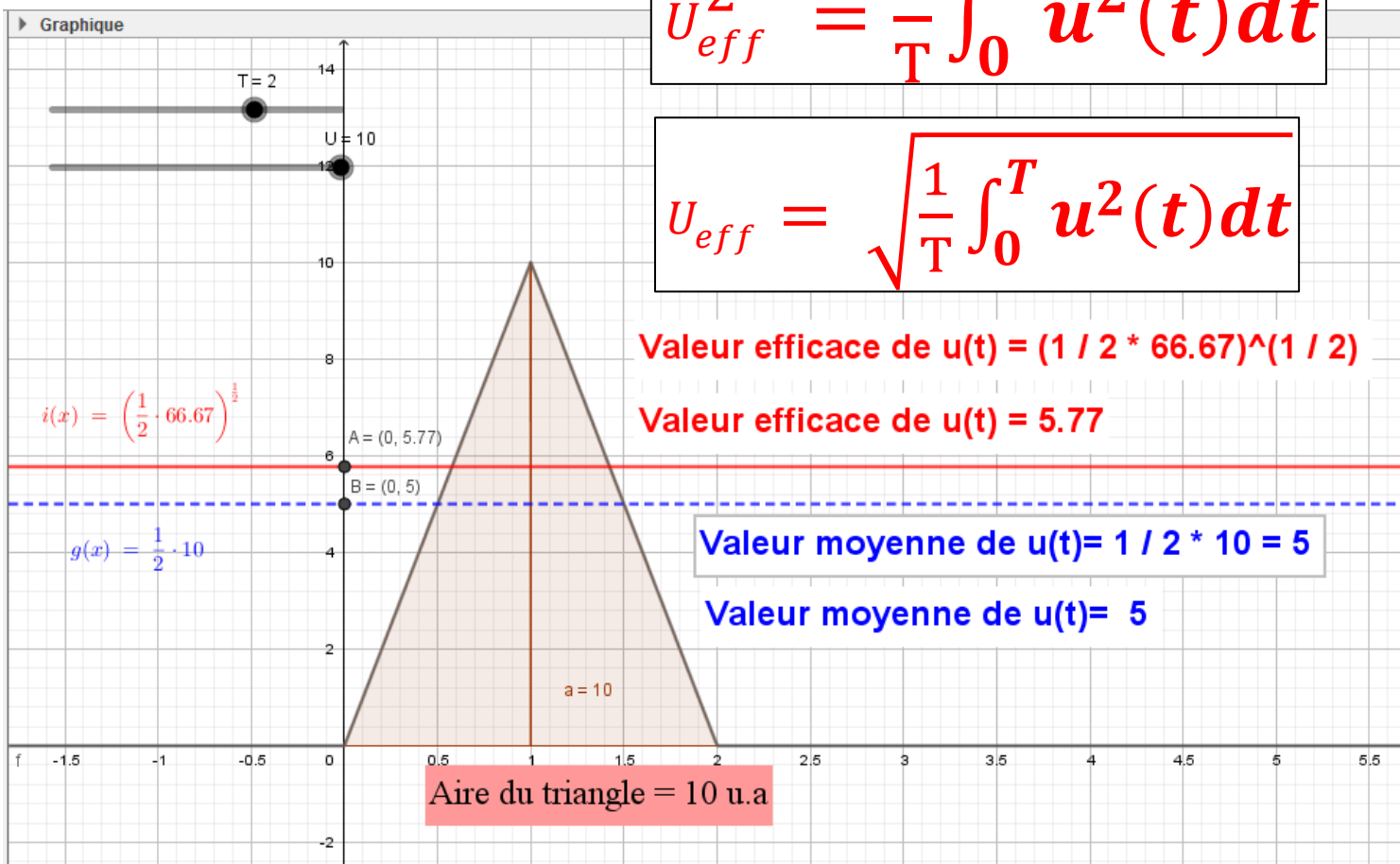
$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$$

Valeur efficace de $u(t) = (1 / 2 * 66.67)^{(1 / 2)}$

Valeur efficace de $u(t) = 5.77$

Valeur moyenne de $u(t) = 1 / 2 * 10 = 5$

Valeur moyenne de $u(t) = 5$



Rappels: $P = U_{eff} \times I_{eff}$ avec $U_{eff} = R \times I_{eff}$ et $W = P \times t$

Partie D :

A chaque instant t de $[0; 2]$, la tension $u(t)$ est la somme de sa valeur moyenne $\langle u(t) \rangle$ et de sa composante alternative notée $\tilde{u}(t)$, on a alors $u(t) = \langle u(t) \rangle + \tilde{u}(t)$

Soit $\tilde{u}(t) = u(t) - \langle u(t) \rangle$ sur $[0; 2]$

1. Représenter $\tilde{u}(t)$ dans le repère donné en partie B.
2. En déduire graphiquement la valeur moyenne $\langle \tilde{u}(t) \rangle$ sur $[0; 2]$.
3. Calculer la valeur efficace $\tilde{U}$ de $\tilde{u}(t)$ sur $[0; 2]$
4. En Physiques, on utilise la relation $U^2 = \tilde{U}^2 + \langle u(t) \rangle^2$

Vérifier cette relation.

Partie E : Approfondissement possible :

On veut démontrer que la valeur efficace U de la tension $u(t)$ sur $[0; T]$ est donnée par $U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}$.

Sachant que la valeur efficace U d'une tension périodique est la tension continue constante qui dissiperait la même puissance qu'un dipôle purement résistif, la puissance dissipée est égale à :

$$\frac{1}{RT} \int_0^T u^2(t) dt = \frac{1}{RT} \int_0^T U^2 dt$$

En déduire l'expression de U en fonction de $u(t)$.

Remarque : On pourra mener le même exercice, pour un signal périodique $u(t)$ de période T ms tel que

$$\begin{cases} u(t) = at \text{ si } 0 < t \leq \frac{T}{2} \\ u(t) = -at + 20 \text{ si } \frac{T}{2} < t \leq T \end{cases} \text{ avec } a \text{ une constante en V/ms.}$$

Valeur efficace

SOURCE: <http://sa.ge.sts.free.fr/Wiki/pmwiki.php?n=SA.ValEff>

L'intensité efficace **I** d'un **courant variable i(t)** prise sur un temps Δt est l'intensité du courant continu qui **dissiperait par effet Joules** dans une résistance **la même énergie**.

La valeur efficace est donc $I = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle}$

(la notation entre $\langle \rangle$ indique que c'est une **valeur moyenne**)

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal

Uniquement pour un signal sinusoïdal la **valeur efficace** d'une grandeur $v(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$

$v(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$ est notée **V** (en majuscule) et vaut $V = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$

Mesure d'une valeur efficace

Elle se mesure avec des appareils numériques:

On utilise des appareils « **RMS** ». (Parfois en position **AC+DC**).

Attention certains appareils ne mesurent une valeur efficace que si la grandeur est sinusoïdale.

(Électrotechnique)

Efficace (valeur quadratique moyenne).

• **RMS value**. Valeur efficace.

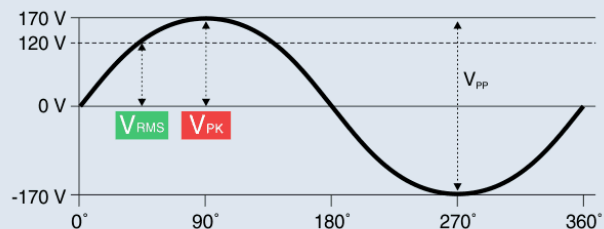
• **RMS current**. Courant efficace

Root mean square.

RMS : <https://www.promax.fr/fra/actualites/561/que-signifie-rms-et-true-rms-nous-expliquons-ici-les-differences/>

$$V_{\text{RMS}} = \frac{V_{\text{PK}}}{\sqrt{2}} \approx V_{\text{PK}} \times 0,707$$

$$V_{\text{TRMS}} = \sqrt{\frac{V_1^2 + V_2^2 + \dots + V_n^2}{n}}$$



Démonstration:

La puissance **P** dépensée dans une résistance est

- $P = R \times i(t)^2$
- $P = R \times i(t)^2$ si le courant est variable
- $P = R \times I^2$
- $P = R \times I^2$ si le courant est continu

L'énergie **W** étant la moyenne des puissances consommées à chaque instant multiplié par le temps d'usage de ces puissances,

on peut donc noter

(la notation entre $\langle \rangle$ indique que c'est une **valeur moyenne**):

$W = R \times \langle i(t)^2 \rangle \times \Delta t$ si le courant est variable

• $W = R \times I^2 \times \Delta t$ si le courant est continu.

Comme le courant est continu: $\langle I^2 \rangle = I^2$

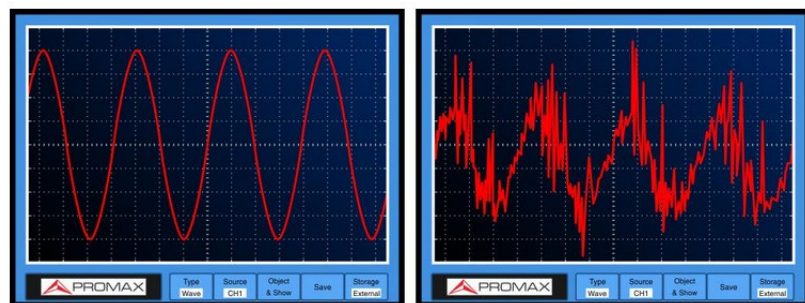
Comme dans la définition de la valeur efficace, les énergies doivent être équivalentes, on peut égaliser les deux équations.

$W = R \times \langle i(t)^2 \rangle \times \Delta t = R \times I^2 \times \Delta t$

Puis simplifier par R et Δt

Donc $\langle i(t)^2 \rangle = I^2$ soit $I^2 = \langle i^2(t) \rangle$ $I = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle}$

MULTIMETRE TRUE RMS >



Une onde sinusoïdale parfaite (gauche) et une onde plus réaliste affectée par le bruit