BTS Nouvelle Calédonie 2018 - groupement A

Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.

Exercice 1

Partie A : Calcul des coefficients de Fourier et développement en série de Fourier

On considère la fonction f, périodique de période T,

définie sur $\left]-\frac{T}{2}\,;\,\frac{T}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{T}{2} - x$

Le développement en série de Fourier de la fonction f est noté :

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [\, a_n \cos(n\omega x\,) + b_n \sin(\,n\omega x)\,]$$

$$avec\ \omega = \frac{2\pi}{T}$$

On rappelle les résultats suivants :

Pour $n \geqslant 1$:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x}$$

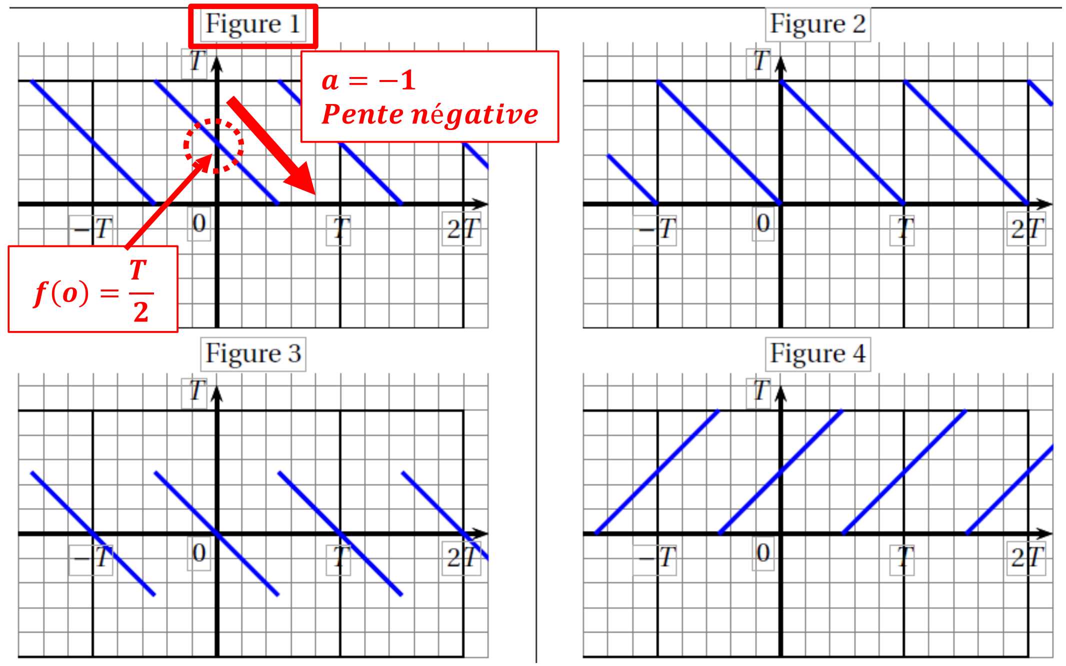
$$\boxed{b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x}$$

1. Compléter le tableau de valeurs de f sur le document réponse.

Partie A 1.

x	$-\frac{T}{4}$	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$
$f(x) = \frac{T}{2} - x$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{T}{4}$	0

2. La fonction f est représentée sur une des figures suivantes. Laquelle ? Justifier.



Justification: $f(x) = \frac{T}{2} - x$ de la forme $f(x) = ax + b$

figure 1 avec $a = -1$ d'où pente négative et $f(0) = b = \frac{T}{2}$

Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.

Exercice 1 (Suite)

Partie A : Calcul des coefficients de Fourier et développement en série de Fourier

À partir de la question **3.** et jusqu'à la fin de l'exercice, on prend $T = 2$.

Ainsi on a : $f(x) = 1 - x$ sur $]-1\ ;\ 1]$ et f périodique de période 2.

3. Déterminer par la méthode de votre choix, que l'on indiquera, la valeur moyenne a_0 de f.

$f(x) = 1 - x$

$x \in]-1;+1]$

Méthode 1 : *lecture graphique*

$$a_0 = \frac{T}{2} = 1$$

Méthode 2 : *Calcul à partir de la définition*

$$a_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{1-(-1)}\int_{-1}^{+1}(1-x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{+1} = 1$$

4. On s'intéresse maintenant aux coefficients a_n et b_n ($n \geqslant 1$) du développement en série de Fourier de f.

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants, qui sont admis et n'ont pas à être démontrés :

▶ T	
1	a_n := Intégrale((1-x)*cos(n*pi*x), x, −1, 1) $\rightarrow a_n := 2\cdot\dfrac{\sin(n\pi)}{n\pi}$
2	b_n := Intégrale((1-x)*sin(n*pi*x), x, −1, 1) $\rightarrow b_n := \dfrac{2n\pi\cos(n\pi) - 2\sin(n\pi)}{n^2\pi^2}$

a. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = 0$.

$$a_n = 2.\frac{\sin(n\omega)}{n\pi} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad avec\ T = 2$$

$$d'où\ \omega = \pi\ alors\ a_n = 2\frac{\sin(n\pi)}{n\pi}$$

$$pour\ n \geq 1 :\ \sin(n\pi) = 0\ alors \quad \boxed{a_n = 0}$$

b. Simplifier, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de b_n.

$$b_n = \frac{2n\pi\cos(n\pi) - 2\sin(n\pi)}{n^2\pi^2} \qquad pour\ n \geq 1 :\ \sin(n\pi) = 0$$

$$alors\ b_n = 2.n.\pi.\frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} = 2.\frac{\cos(n\pi)}{n\pi} \qquad \boxed{b_n = 2.\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}}$$

Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.

Exercice 1 (Suite)

Partie A : Calcul des coefficients de Fourier et développement en série de Fourier

5. On s'intéresse aux valeurs de b_n pour n allant de 1 à 5.

Compléter le tableau du document réponse.

Partie A 5.
Arrondir les résultats à 10^{-3}.

$$b_n = 2.\frac{cos(n\pi)}{n\pi}$$

n	1	2	3	4	5
b_n	- 0,637	+ 0,318	- 0,212	+ 0,159	- 0,127

$$b_1 = 2.\frac{cos(1.\pi)}{1.\pi} \qquad b_1 = \frac{-2}{\pi}$$

$$b_2 = 2.\frac{cos(2.\pi)}{2.\pi} \qquad b_2 = \frac{1}{\pi}$$

$$b_3 = 2.\frac{cos(3.\pi)}{3.\pi} \qquad b_3 = \frac{-2}{3.\pi}$$

$$b_4 = 2.\frac{cos(4.\pi)}{4.\pi} \qquad b_4 = \frac{1}{2\pi}$$

$$b_5 = 2.\frac{cos(5.\pi)}{5.\pi} \qquad b_5 = \frac{-2}{5.\pi}$$

6. On note $s_n(x)$ le développement de Fourier de la fonction f à l'ordre n, c'est à dire la somme de la composante continue a_0 et des n premières harmoniques de f, soit :

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\pi x).$$

On trouve, sur chacune des quatre figures de la page suivante, la représentation graphique de la fonction f (en pointillés) et la représentation graphique d'une fonction s_n pour n valant 1, 2, 3 ou 5 (traits pleins).

Indiquer, pour chaque figure, laquelle des sommes s_1, s_2, s_3, et s_5 y est représentée.

On n'attend pas de justification.

$S_1 = a_0 + b_1 sin(1.\pi.x) = 1 - 0,637 sin(\pi.x)$

$S_2 = a_0 + b_1 sin(1.\pi.x) + b_2\ sin(2.\pi.x) = 1 - 0,637.sin(\pi.x) + + 0,318.sin(2\pi.x)$

La figure D est l'harmonique de rang le plus élevé car se rapproche au plus près de f(x)

Harmonique de rang 2 Figure A

S_2

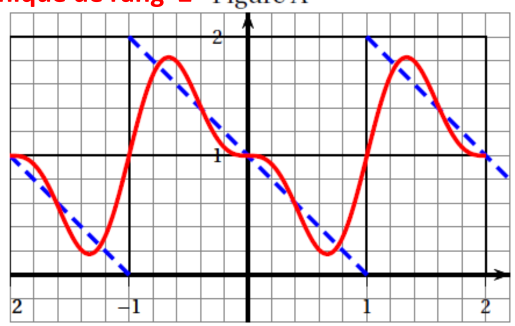
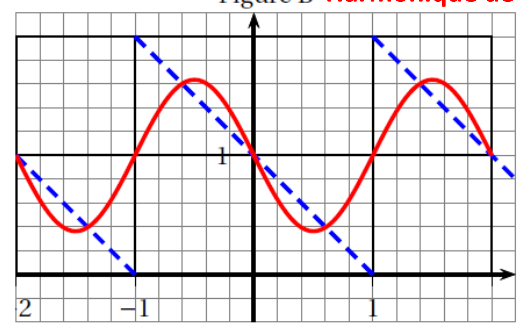


Figure B **Harmonique de rang 1**

S_1



Harmonique de rang 3 Figure C

S_3

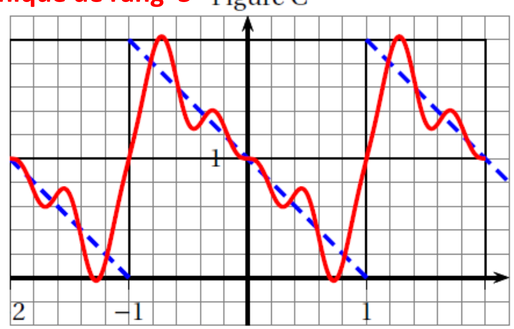
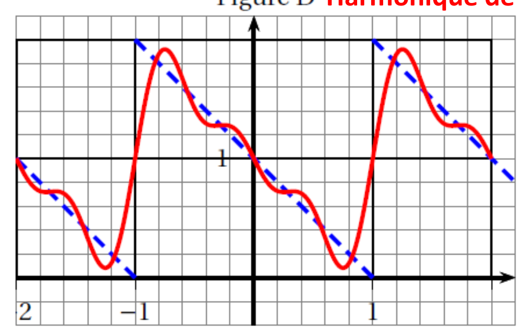


Figure D **Harmonique de rang 5**

S_5



Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.

Exercice 1 (Suite) Partie B : Valeur efficace de f sur une période :

1. On rappelle que la valeur efficace E_{eff} de f sur $[-1\,;\,1]$ est donnée par :

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x.$$

On admet que : $E_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x)^2 \,\mathrm{d}x.$

a. Développer $(1-x)^2$ puis calculer E_{eff}^2.

$$(1-x)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$E_{eff}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (x^2 - 2x + 1)\, dx$$

b. Écrire les étapes du calcul et donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du résultat.

$$E_{eff}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} (x^2 - 2x + 1)\, dx$$

$$E_{eff}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{+1}$$

$$E_{eff}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1^3}{3} - 2.\frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 2.\frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right)\right]$$

$$E_{eff}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right) - \left(-2 - \frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3} + 2\right] = \frac{4}{3}$$

$$\boxed{E_{eff}^2 = \frac{4}{3}} \qquad \boxed{E_{eff}^2 = 1{,}333}$$

2. On rappelle la formule de Parseval : $E_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de E_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est à dire : $P \approx a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

a. Calculer une valeur arrondie à 10^{-3} de P.

$$P \approx a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+5}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$$

D'après les résultats précédents partie 4:

$$\boxed{a_0 = 1} \qquad \boxed{a_n = 0} \qquad \boxed{b_n = 2.\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}}$$

$$d'où \quad \boxed{P \approx 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+5} b_n^2}$$

D'après les résultats du tableau de la partie 5. en les reportant, on obtient :

$$P \approx 1 + \frac{1}{2}\left((-0{,}637)^2 + (+0{,}318)^2 + (-0{,}212)^2 + (+0{,}159)^2 + (-0{,}127)^2\right)$$

n	$b_n = 2.\frac{\cos(n\pi)}{n\pi}$	b_n^2	$\sum_{n=1}^{+5} b_n^2$	$P \approx 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+5} b_n^2$	$\frac{P}{E_{eff}^2}$	$\frac{P}{E_{eff}^2}$
1	-0,637	0,406	0,593	1,297	0,973	97%
2	0,318	0,101				
3	-0,212	0,045				
4	0,159	0,025				
5	-0,127	0,016				

$$\boxed{P \approx 1{,}297}$$

b. Calculer $\frac{P}{E_{\text{eff}}^2}$. Donner le résultat en % arrondi à l'unité.

$$\frac{P}{E_{eff}^2} \approx \frac{1{,}297}{1{,}333} = 0{,}973 \qquad \boxed{\frac{P}{E_{eff}^2} \approx 97{,}3\ \%}$$

c. Interpréter le résultat du **b.**

Avec 5 harmoniques on obtient 97 % de la valeur efficace au carré du signal !