Brevet de technicien supérieur 2018
Nouvelle Calédonie groupement A

Exercice 1 **8 points**

Dans le cadre de la conception d'un circuit à modulation de longueur d'impulsion, on étudie le spectre d'un signal porteur en dent de scie.

Partie A : Calcul des coefficients de Fourier et développement en série de Fourier

On considère la fonction f, périodique de période T, définie sur $\left]-\dfrac{T}{2}\,;\,\dfrac{T}{2}\right]$ par :

$$f(x) = \frac{T}{2} - x.$$

Le développement en série de Fourier de la fonction f est noté :

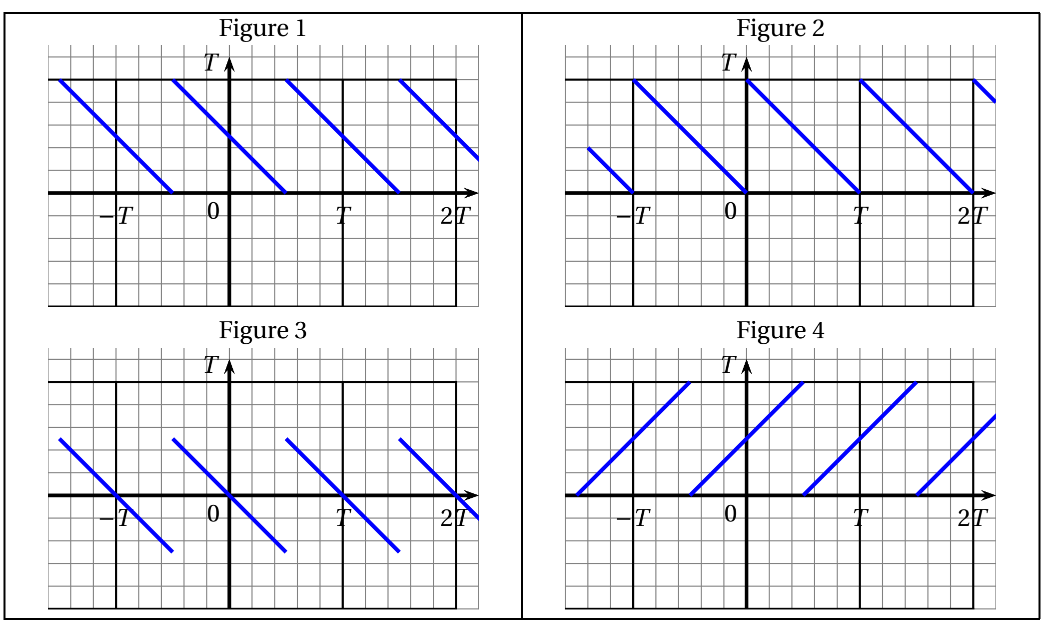
$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\right] \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

On rappelle les résultats suivants :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Pour $n \geqslant 1$: $a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x$ et $b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x$

1. Compléter le tableau de valeurs de f sur le document réponse.
2. La fonction f est représentée sur une des figures suivantes. Laquelle ? Justifier.



À partir de la question **3.** et jusqu'à la fin de l'exercice, on prend $T = 2$.

Ainsi on a : $f(x) = 1 - x$ sur $]-1\,;\,1]$ et f périodique de période 2.

3. Déterminer par la méthode de votre choix, que l'on indiquera, la valeur moyenne a_0 de f.

4. On s'intéresse maintenant aux coefficients a_n et b_n ($n \geqslant 1$) du développement en série de Fourier de f.

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants, qui sont admis et n'ont pas à être démontrés :

▶ **T**	
1	a_n := Intégrale((1-x)*cos(n*pi*x), x, −1, 1) $\rightarrow a_n := 2 \cdot \dfrac{\sin(n\pi)}{n\pi}$
2	b_n := Intégrale((1-x)*sin(n*pi*x), x, −1, 1) $\rightarrow b_n := \dfrac{2n\pi\cos(n\pi) - 2\sin(n\pi)}{n^2\pi^2}$

a. Justifier que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = 0$.

b. Simplifier, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'expression de b_n.

5. On s'intéresse aux valeurs de b_n pour n allant de 1 à 5.

Compléter le tableau du document réponse. Arrondir les résultats à 10^{-3}.

6. On note $s_n(x)$ le développement de Fourier de la fonction f à l'ordre n, c'est à dire la somme de la composante continue a_0 et des n premières harmoniques de f, soit :

$$s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(k\pi x).$$

On trouve, sur chacune des quatre figures de la page suivante, la représentation graphique de la fonction f (en pointillés) et la représentation graphique d'une fonction s_n pour n valant 1, 2, 3 ou 5 (traits pleins).

Indiquer, pour chaque figure, laquelle des sommes s_1, s_2, s_3, et s_5 y est représentée.

On n'attend pas de justification.

Figure A

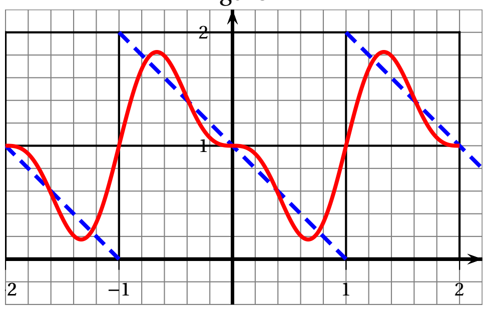


Figure B

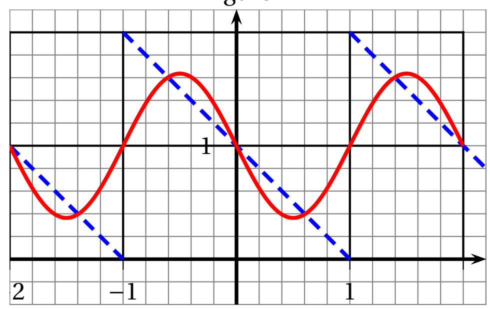


Figure C

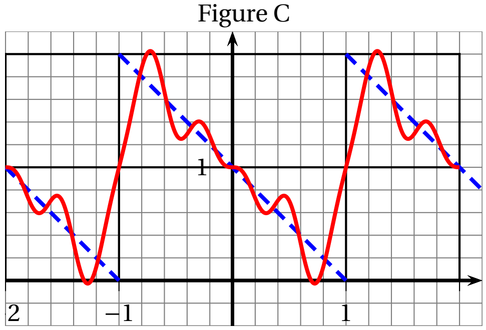
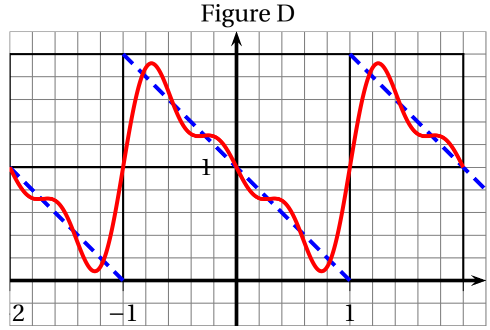


Figure D



Partie B : Valeur efficace de f sur une période :

1. On rappelle que la valeur efficace E_{eff} de f sur $[-1\,;\,1]$ est donnée par :

$$E_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[f(x)\right]^2\,\mathrm{d}x.$$

On admet que : $E_{\text{eff}}^2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-x)^2\,\mathrm{d}x$.

Développer $(1-x)^2$ puis calculer E_{eff}^2.

Écrire les étapes du calcul et donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} du résultat.

2. On rappelle la formule de Parseval :

$$E_{\text{eff}}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

On décide de calculer une valeur approchée, notée P, de E_{eff}^2 en se limitant aux cinq premiers termes de la somme, c'est à dire :

$$P \approx a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}\left(a_n^2 + b_n^2\right).$$

a. Calculer une valeur arrondie à 10^{-3} de P.

b. Calculer $\dfrac{P}{E_{\text{eff}}^2}$. Donner le résultat en % arrondi à l'unité.

c. Interpréter le résultat du **b.**

EXERCICE 2 **12 points**

Les parties **A, B, C** de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A :

On étudie un circuit RC série constitué d'un condensateur de capacité $C = 1$ farad associé à une résistance ajustable R (appelée aussi rhéostat).
R doit donc être considérée comme un paramètre strictement positif (exprimé en ohm).
Le temps t est mesuré en seconde.

À l'instant $t = 0$, l'ensemble du montage est soumis à une tension constante de 12 volts.
La tension, en volt, $u_C(t)$ aux bornes du condensateur est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : \qquad RCy'(t) + y(t) = 12.$$

1. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme d'une constante.
2. **a.** Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) :

$$(E_0) : \qquad RCy'(t) + y(t) = 0.$$

   b. En déduire les solutions de l'équation (E).
   On rappelle

Equation différentielle	Solutions
$ay'(t) + by(t) = 0$, avec a et b des constantes réelles, $a \neq 0$.	$y :\ t \longmapsto K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$, avec K constante réelle.

3. On considère que la tension aux bornes du condensateur à l'instant $t = 0$ est nulle, c'est à dire : $u_C(0) = 0$.
   Déterminer $U_C(t)$ en fonction de R et de t.
4. On souhaite que la tension $U_C(t)$ aux bornes du condensateur atteigne 11 volts au bout de 10 secondes.
   Quelle est la valeur de R permettant de réaliser cela ? Arrondir à 10^{-2}.

Partie B :

La fonction échelon $\mathcal{U}$ est définie par : $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$

On rappelle les résultats suivants concernant la transformation de Laplace où f est une fonction ayant pour transformée de Laplace F :

Fonction	Transformée de Laplace de la fonction
$t \longmapsto \mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$
$t \longmapsto t\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p^2}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, $a \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
$t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, $a \in \mathbb{R}$	$p \longmapsto F(p+a)$
$t \longmapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto pF(p) - f\left(0^+\right)$

On étudie un circuit RC série constitué d'un condensateur de capacité $C = 1$ farad et d'une résistance $R = 1$ ohm.
La tension d'entrée e (en volt) est définie en fonction du temps t (en seconde) par :

$$e(t) = 4t\mathrm{e}^{-2t}\mathcal{U}(t).$$

Il s'agit d'une rampe atténuée.
La tension de sortie $s(t)$ (exprimée en volt), prise aux bornes du condensateur à l'instant t, vérifie :

$$(E_1) : \qquad s'(t) + s(t) = e(t) \quad \text{et} \quad s(0) = 0.$$

1. On souhaite étudier les variations de e sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Un logiciel de calcul formel a donné le résultat suivant :

   $$e'(t) = \mathrm{e}^{-2t}(4 - 8t).$$

   En déduire le sens de variations de e sur $[0\,;\,+\infty[$. Justifier.
2. Déterminer la transformée de Laplace $E(p)$ de la tension d'entrée $e(t)$.
3. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (E_1), démontrer que :

   $$S(p) = \frac{4}{(p+2)^2(p+1)}.$$

4. Un logiciel de calcul formel fournit la décomposition suivante :

1	ÉlémentsSimples$\left(\dfrac{4}{(p+2)^2(p+1)}, p\right)$ $\rightarrow \dfrac{4}{p+1} - \dfrac{4}{(p+2)^2} - \dfrac{4}{p+2}$

   En déduire l'expression de $s(t)$ en fonction de t et de $\mathcal{U}(t)$.
5. La tension de sortie $s(t)$ est représentée en fonction de t sur le document réponse.
   Estimer graphiquement pendant combien de temps la tension de sortie est supérieure ou égale à $0,25$ volt.

Partie C :

Une société produit et commercialise des résistances de 500 ohms.

1. Le procédé de fabrication entraine des variations au niveau de la valeur de chaque résistance produite. On admet que la valeur en ohm d'une résistance produite peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 500$ et d'écart-type $\sigma = 10$.
   Pour qu'une résistance soit conforme, sa valeur doit être comprise entre 485 Ω et 515 Ω.
   a. On considère une résistance prise au hasard dans la production.
   Quelle est la probabilité que cette résistance soit conforme ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.
   b. L'entreprise améliore la qualité de sa production en adaptant le procédé de fabrication. Cela modifie la valeur de σ sans changer la valeur de μ.
   Quelle est la plus grande valeur décimale à un chiffre après la virgule que peut avoir σ pour que 95 % au moins des résistances produites soient conformes ? Expliquer la démarche.

2. La société commercialise les résistances produites par lot de 200.

On considère que la production est assez importante pour que la constitution d'un lot de 200 soit assimilable à 200 tirages avec remise.

On admet que 5 % des résistances produites sont non conformes.

On note Y la variable aléatoire qui associe à chaque lot de 200 résistances le nombre de résistances non conformes que contient le lot. On admet que Y suit une loi binomiale de paramètres n et p.

a. Donner les valeurs de n et p.

b. Calculer $P(Y = 10)$. Arrondir le résultat à 10^{-3}.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

c. Un client peut renvoyer un lot s'il contient au moins 15 résistances non conformes.

Calculer la probabilité qu'un lot, choisi au hasard parmi les lots commercialisés, puisse être renvoyé ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.

3. Pour améliorer la satisfaction de ses clients, la société met en place un contrôle qualité avant de commercialiser les résistances. On rappelle que 5 % des résistances fabriquées sont non conformes.

Le contrôle qualité permet de rejeter 80 % des résistances non conformes. Mais malheureusement, lors de ce contrôle, 10 % des résistances conformes sont également rejetées.

On choisit au hasard une résistance dans la production.

On note :

- C l'évènement « la résistance choisie est conforme » ;
- R l'évènement « la résistance choisie est rejetée par le contrôle qualité ».

a. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.

b. Quelle est la probabilité qu'une résistance soit rejetée lors du contrôle qualité ?

c. Une résistance est choisie au hasard parmi les résistances non rejetées par le contrôle qualité.

Quelle est la probabilité qu'elle soit conforme ? Arrondir la réponse à 10^{-3}.

DOCUMENT RÉPONSE à rendre avec la copie

Exercice 1

Partie A 1.

x	$-\dfrac{T}{4}$	0	$\dfrac{T}{4}$	$\dfrac{T}{2}$
$f(x)$				

Partie A 5.

n	1	2	3	4	5
b_n					

Exercice 2

Partie B 5. : Représentation graphique de la tension de sortie s