Un système est modélisé par un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur en série.

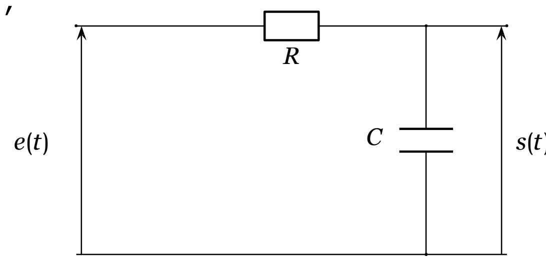
On note R la valeur de la résistance, en ohm, et C la capacité du condensateur, en farad.

$e(t)$ est la tension aux bornes du circuit, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).
$s(t)$ est la tension aux bornes du condensateur, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).

À l'instant $\boldsymbol{t = 0}$ le condensateur est déchargé et on a : $\boldsymbol{s(0) = 0}$. ,
L'application des lois de la physique conduit,
pour tout $t \geq 0$, à la relation : $RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$
qui s'écrit encore :

$$\tau s'(t) + s(t) = e(t), \text{ avec } \tau = RC.$$

Dans tout l'exercice, on suppose que : $\tau = 2$ secondes.



On rappelle que la fonction échelon unité est définie sur $\mathbb{R}$ ***par***: $\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

Dans cette partie, la tension aux bornes du circuit vérifie, pour tout réel t: $\boldsymbol{e(t) = 6\,\mathscr{U}(t) - 6\,\mathscr{U}(t-2)}$
On admet que les fonctions $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{s}$ sont des fonctions causales admettant des transformées de Laplace notées respectivement E et S.

Des formules utiles au calcul des transformées de Laplace sont données au verso.

1. a. Représenter la fonction $\boldsymbol{e}$ dans le repère donné sur le **document réponse.**

b. Déterminer $\boldsymbol{E(p)}$.

2. On rappelle que pour t différent de 0 et 2 : $\boldsymbol{2s'(t) + s(t) = e(t)}$ ***et que*** $\boldsymbol{s(0) = 0}$

a. Écrire l'égalité obtenue en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité : $\boldsymbol{2s'(t) + s(t) = e(t)}$

b. En déduire que : $\boldsymbol{s(p) = \frac{6}{p(2p+1)} - \frac{6}{p(2p+1)}\, e^{-2p}}$

3. On recherche dans cette question l'original de $\boldsymbol{A(p) = \frac{6}{p(2p+1)}}$

a. Montrez que: $\boldsymbol{\frac{6}{p(2p+1)} = \frac{6}{p} - \frac{12}{2p+1}}$

b. Comme $\boldsymbol{\frac{12}{2p+1} = \frac{6}{p+\frac{1}{2}}}$, on peut écrire que : $\boldsymbol{A(p) = \frac{6}{p} - \frac{6}{p+\frac{1}{2}}}$

En déduire l'original $\boldsymbol{a(t)}$ de $\boldsymbol{A(p)}$.

4. En remarquant que $\boldsymbol{S(p) = A(p) - A(p)e^{-2p}}$, déduire des questions précédentes une expression de $\boldsymbol{s}$

5. On s'intéresse dans cette question à la fonction $\boldsymbol{s}$ sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$

On admet que pour $t \geq \boldsymbol{2}$: $\boldsymbol{s(t) = 6(e - 1)e^{-\frac{1}{2}t}}$:

a. Étudier les variations de la fonction s sur l'intervalle $[2\,;+\infty[$.

a. Déterminer la limite de la fonction $\boldsymbol{s}$ quand t tend vers $+\infty$. Justifier.

6. Sur le **document réponse** on a tracé la représentation graphique de $\boldsymbol{s}$ sur l'intervalle $[0\,;2]$

a. Compléter la représentation graphique de $\boldsymbol{s}$.

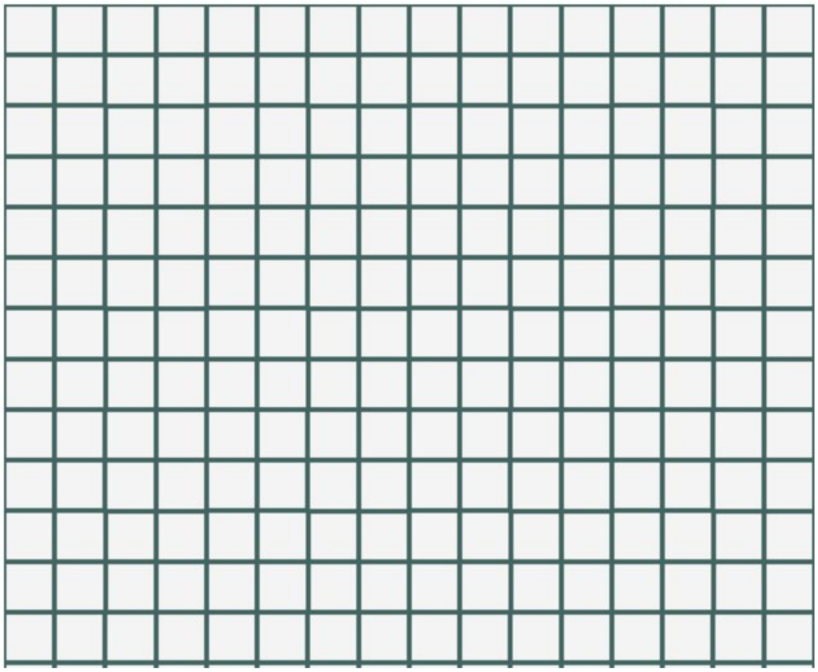
b. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{s}$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ obtenue.

DOCUMENT RÉPONSE À RENDRE AVEC LA COPIE

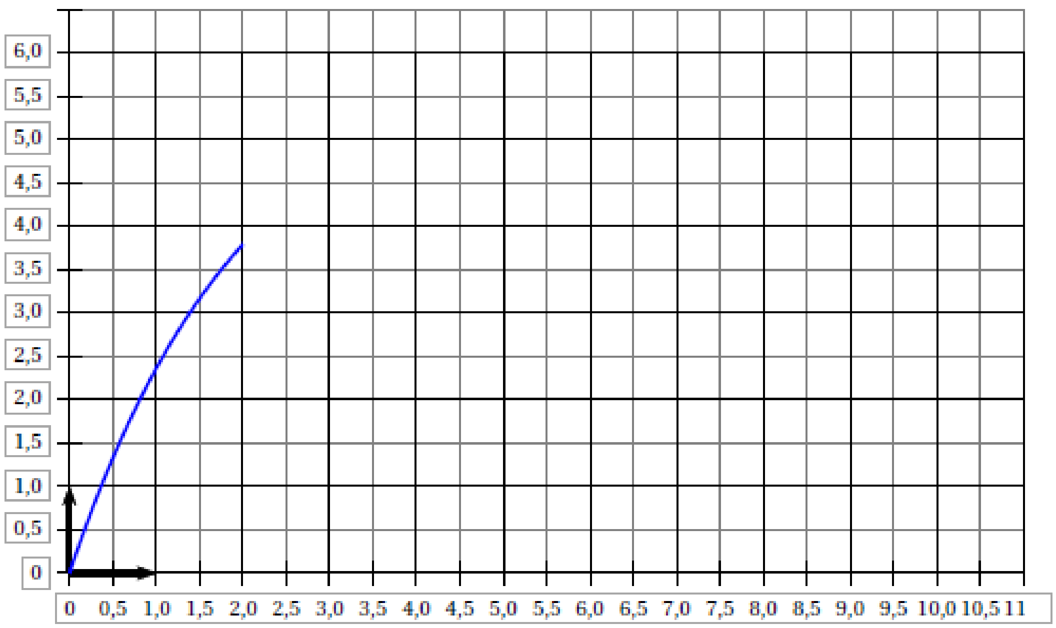
EXERCICE 1- Partie B - 6. - Courbe représentative des fonctions **e(t)** et **s(t)**

fonction ***e***

$e(\mathbf{t}) = \mathbf{6}\ \mathscr{U}(t) - 6\,\mathscr{U}(t\text{-}2)$



fonction ***s***



Transformation de Laplace	
Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto \mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$
$t \longmapsto \mathscr{U}(t-a)$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$
Propriétés	
Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto f(t)\mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto F(p)$
$t \longmapsto f(t-a)\mathscr{U}(t-a)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$
$t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathscr{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto F(p+a)$
$t \longmapsto f'(t)\mathscr{U}(t)$	$p \longmapsto pF(p) - f\left(0^+\right)$

Adaptation : Christian Louis MATHIEU