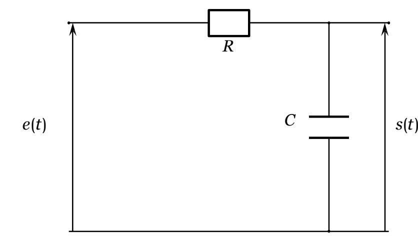
Un système est modélisé par un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur en série.

On note *R* la valeur de la résistance, en ohm, et *C* la capacité du condensateur, en farad. *e*(*t*) est la tension aux bornes du circuit, exprimée en volt, à l'instant *t* (en Seconde). *s*(*t*) est la tension aux bornes du condensateur, exprimée en volt, à l'instant *t* (en seconde).



À l'instant $t = 0$ le condensateur est déchargé et on a : $s(0) = 0$ L'application des lois de la physique conduit, pour tout $t \geq 0$, à la relation : $RC\, s'(t) + s(t) = e(t)$ qui s'écrit encore : $\tau s'(t) + s(t) = e(t)$, avec $\tau = RC$.

Dans tout l'exercice, on suppose que : $\tau = 2$ secondes.

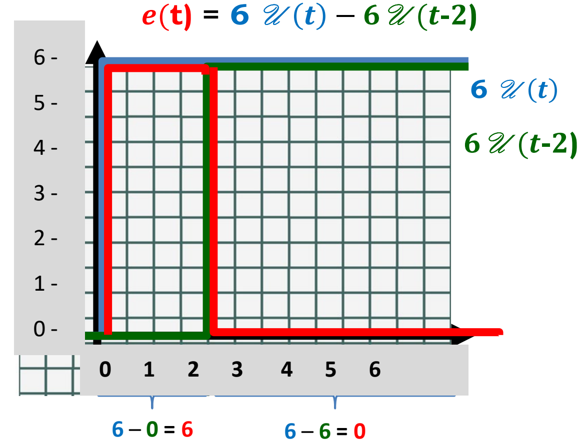
On rappelle que la fonction échelon unité est définie sur $\mathbb{R}$ *par*: $\begin{cases} \mathcal{U}(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ \mathcal{U}(t) = 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$

Dans cette partie, la tension aux bornes du circuit vérifie, pour tout réel t : $e(t) = 6\,\mathcal{U}(t) - 6\,\mathcal{U}(t-2)$

On admet que les fonctions e et s sont des fonctions causales admettant des transformées de Laplace notées respectivement E et S. ***Des formules utiles au calcul des transformées de Laplace sont données au verso.***

fonction e

$e(t) = 6\,\mathcal{U}(t) - 6\,\mathcal{U}(t-2)$



1.a. Représenter la **fonction e** dans le repère donné sur le **document réponse.**

b. Déterminer $E(p)$.

$e(t) = 6\,\mathcal{U}(t) - 6\,\mathcal{U}(t-2)$

$\mathcal{L}[e(t)] = \mathcal{L}[6\,.\,\mathcal{U}(t)] - \mathcal{L}[6\,\mathcal{U}(t-2)]$

$E(p) = 6 \times \frac{1}{p} - 6 \times \frac{1}{p}.e^{-2p}$

$\boxed{E(p) = \frac{6}{p}(1 - e^{-2p})}$

$\mathcal{L}[6\,\mathcal{U}(t-2)] = \mathcal{L}[6\,.\,\mathcal{U}(t-2)]$

$\mathcal{L}[6\,\mathcal{U}(t-2)] = 6 \times \mathcal{L}[1.\,\mathcal{U}(t-2)]$

$\mathcal{L}[6\,\mathcal{U}(t-2)] = 6 \times \frac{1}{p}.e^{-2p}$

$\mathcal{L}[6\,.\,\mathcal{U}(t)] = 6 \times \mathcal{L}[1\,.\,\mathcal{U}(t)]$

$\mathcal{L}[6\,.\,\mathcal{U}(t)] = 6 \times \frac{1}{p}$

2.On rappelle que pour t différent de 0 et 2 : $2s'(t) + s(t) = e(t)$ *et que* $s(0) = 0$

a. Écrire l'égalité obtenue en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité : $2s'(t) + s(t) = e(t)$

2.b. En déduire que : $s(p) = \frac{6}{p(2p+1)} - \frac{6}{p(2p+1)}\,e^{-2p}$

$2s'(t) + s(t) = e(t)$

$\mathcal{L}[2.s'(t) + s(t)] = \mathcal{L}[e(t)]$

$2.p.S(p) - S(0^+) + s(p) = \frac{6}{p}(1 - e^{-2p})$

$s(p)(2p+1) = \frac{6}{p}(1 - e^{-2p})$

$\boxed{s(p) = \frac{6}{p(2p+1)}(1 - e^{-2p})}$

$\mathcal{L}[2.s'(t)] = 2.p.S(p) - S(0^+)$

Conditions initiales à t= 0 :

$S(0) = 0)$

$\mathcal{L}[s(t)] = S(p)$

$\mathcal{L}[e(t)] = E(p) = \frac{6}{p}(1 - e^{-2p})$

$S(p) = \frac{6}{p(2p+1)}(1 - e^{-2p})$

$\boxed{(S(p) = \frac{6}{p(2p+1)} - \frac{6}{p(2p+1)}\,e^{-2p}}$

3. On recherche dans cette question l'original de $A(p) = \frac{6}{p(2p+1)}$

a. Montrez que: $\frac{6}{p(2p+1)} = \frac{6}{p} - \frac{12}{2p+1}$

$A(p) = \frac{6}{p(2p+1)}$ *Je cherche à mettre $A(p)$ sous une forme permettant de touver l'original de $A(p)$ avec le formulaire.*

Décomposition en éléments simples de la forme: $\frac{a}{p} + \frac{b}{2p+1}$ *; le degré de p est 1 au dénominateur alors constantes au numérateur.*

$$A(p) = \frac{6}{p(2p+1)} = \frac{a}{p} + \frac{b}{2p+1} = \frac{a(2p+1)+bp}{p(2p+1)} = \frac{2ap+a+bp}{p(2p+1)} = \frac{(2a+b)p+a}{p(2p+1)}$$

D'où $\begin{cases} 2a+b=0 \\ a=6 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} b=-12 \\ a=6 \end{cases}$

On obtient:

$$\boxed{\frac{6}{p(2p+1)} = \frac{6}{p} + \frac{-12}{2p+1}}$$

b. Comme $\frac{12}{2p+1} = \frac{6}{p+\frac{1}{2}}$, on peut écrire que : $A(p) = \frac{6}{p} - \frac{6}{p+\frac{1}{2}}$

En déduire l'original $a(t)$ de $A(p)$.

D'après le formulaire :

Fonction	Transformée de Laplace
$\mathscr{L}[1 . \mathscr{U}(t)]$	$\frac{1}{p}$
$\mathscr{L}[e^{-ct} . \mathscr{U}(t)]$	$\frac{1}{p+c}$

$$A(p) = \frac{6}{p(2p+1)} = \frac{6}{p} - \frac{6}{p+\frac{1}{2}} = 6 \times \boxed{\frac{1}{p}} - 6 \times \boxed{\frac{1}{p+\frac{1}{2}}}$$

$$A(p) = 6 \times \frac{1}{p} - 6 \times \frac{1}{p+\frac{1}{2}}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[A(p)] = \mathscr{L}^{-1}\left[6 \times \frac{1}{p} - 6 \times \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right]$$

$$a(t) = \mathscr{L}^{-1}[A(p)] = \mathscr{L}^{-1}\left[6 \times \frac{1}{p}\right] - \mathscr{L}^{-1}\left[6 \times \frac{1}{p+\frac{1}{2}}\right] = 6 \times \mathscr{U}(t) - 6 \times e^{-\frac{1}{2}t} . \mathscr{U}(t)$$

$$\boxed{a(t) = 6 \times \mathscr{U}(t) - 6 \times e^{-\frac{1}{2}t} . \mathscr{U}(t)}$$

4.En remarquant que $S(p) = A(p) - A(p)e^{-2p}$, déduire des questions précédentes une expression de s

D'après le résultat de la question 2.b : $S(p) = \dfrac{6}{p(2p+1)} - \dfrac{6}{p(2p+1)}\ e^{-2p}$

D'après l'énoncé de la question 3.a :

$$A(p) = \frac{6}{p(2p+1)}$$

$$S(p) = A(p) - A(p).e^{-2p}$$

D'après le résultat de la question 3.b :

$$a(t) = 6 \times \mathscr{U}(t) - 6 \times e^{-\frac{1}{2}t}.\mathscr{U}(t)$$

$$\boxed{a(t) = 6\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathscr{U}(t)}$$

$$\mathscr{L}^{-1}[S(p)] = \mathscr{L}^{-1}[A(p)] - \mathscr{L}^{-1}\left[A(p).e^{-2p}\right]$$

$$s(t) = a(t)\ \mathscr{U}(t) - \mathscr{L}^{-1}\left[A(p).e^{-2p}\right]$$

D'après la formule :

$$\mathscr{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-p\tau}.F(p) = F(p)e^{-p\tau}$$

$$s(t) = a(t)\ \mathscr{U}(t) - a(t-2)\ \mathscr{U}(t-2)$$

Alors:

$$\mathscr{L}^{-1}\left[A(p).e^{-2p}\right] = a(t-2)\ \mathscr{U}(t-2)$$

$$\boxed{s(t) = 6\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathscr{U}(t) - 6\left(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right)\mathscr{U}(t-2)}$$

Non demandé à cette épreuve de BTS mais juste pour anticiper la question suivante n° 5 où l'équation de s(t) est admise :

5. On s'intéresse dans cette question à la fonction s sur l'intervalle $[2\ ;+\infty[$ On admet que pour $t \geq 2$: $s(t) = 6(e-1)e^{-\frac{1}{2}t}$:

Pour $t \geq 2$, s(t) devient : $s(t) = 6\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right) - 6\left(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right)$ *puisque alors* $\mathscr{U}(t) = 1$ et $\mathscr{U}(t-2) = 1$

$$s(t) = 6\left[\left(1 - e^{-\frac{1}{2}t}\right) - \left(1 - e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right)\right] 6\left[1 - e^{-\frac{1}{2}t} - 1 + e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right]$$

$$s(t) = 6\left[-e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right] = 6\left[-e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} \times e^{-\frac{-2}{2}}\right]$$

$$s(t) = 6\left[-e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} \times e^{+1}\right] = 6\left[-e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} \times e\right]$$

$$s(t) = 6\left[-e^{-\frac{1}{2}t} + e^{-\frac{1}{2}t} \times e\right] = 6\left[+e^{-\frac{1}{2}t} \times e - e^{-\frac{1}{2}t}\right]$$

$$\boxed{s(t) = 6\left[e^{-\frac{1}{2}t}(e-1)\right]}$$

5. On s'intéresse dans cette question à la fonction s sur l'intervalle $[2\ ;+\infty[$

On admet que pour $t \geq 2 :\ s(t) = 6(e-1)e^{-\frac{1}{2}t}$:

a. Étudier les variations de la fonction s sur l'intervalle $[2\ ;+\infty[$.

a.Déterminer la limite de la fonction s quand t tend vers $+\infty$. Justifier.

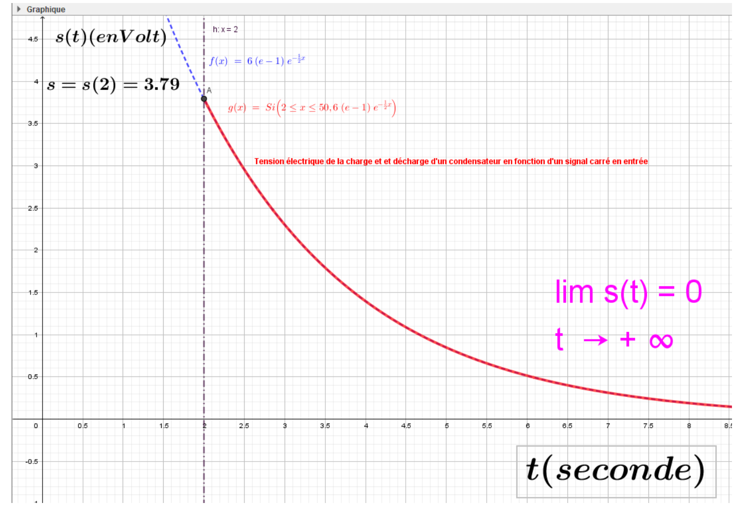
Résultat précédent: s(t) $= 6\left(1-e^{-\frac{1}{2}t}\right)\mathcal{U}(t) - 6\left(1-e^{-\frac{1}{2}(t-2)}\right)\mathcal{U}(t-2)$

t	2		$+\infty$
$s'(t)$		$-$	
$s(t)$	$\frac{6(e-1)}{e}$	↘	0

$t \geq 2 :\ s(t) = 6(e-1)e^{-\frac{1}{2}t}$

$s(2) = \frac{6(e-1)}{e} = 3{,}79$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6(e-1)e^{-\frac{1}{2}t}\right) = 0$



Calcul formel :
De la fonction dérivée

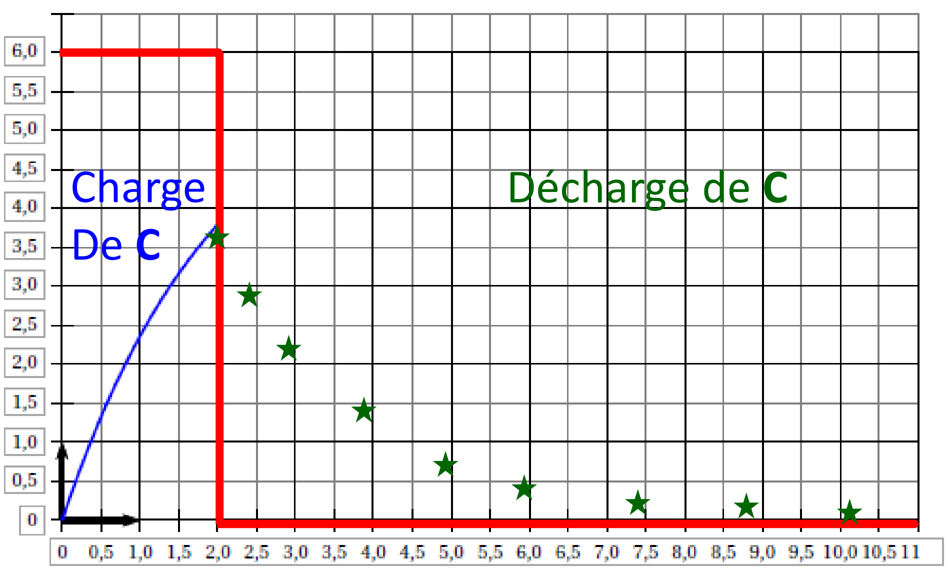
4	\$3
	Dérivée: $-3\,(e-1)\,e^{-\frac{1}{2}x}$

6.Sur le **document réponse** on a tracé la représentation graphique de s sur l'intervalle $[0\ ;2]$

a. Compléter la représentation graphique de s.

b. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, la représentation graphique de la fonction s sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ obtenue.

Charge et décharge du condensateur



Transformation de Laplace	
Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto \mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto \frac{1}{p}$
$t \longmapsto \mathcal{U}(t-a)$	$p \longmapsto \frac{1}{p}e^{-ap}$
$t \longmapsto e^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto \frac{1}{p+a}$
Propriétés	
Fonction	**Transformée de Laplace**
$t \longmapsto f(t)\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto F(p)$
$t \longmapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto F(p)e^{-ap}$
$t \longmapsto f(t)e^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec a constante réelle	$p \longmapsto F(p+a)$
$t \longmapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$	$p \longmapsto pF(p) - f(0^+)$