Point Histoire :

La plage de fréquences sur laquelle il est nécessaire de travailler est en général très large. Par exemple, pour un signal audio, il faut étudier les fréquences entre 20 Hz et 20 kHz. Il se pose donc un problème d'échelle lors de la représentation : comment travailler sur une gamme de fréquences si grande, tout en arrivant à distinguer ce qui se passe, par exemple, autour de 200 Hz et en même temps autour de 8 kHz ? Un moyen simple de résoudre cette difficulté consiste à utiliser une échelle logarithmique pour la fréquence.

Graham Bell

La figure 8.9 montre l'intérêt de l'échelle logarithmique. Elle représente, pour une gamme de fréquences identique, une même courbe de gain selon deux échelles. Les deux minima à 300 et 500 Hz sont difficilement mesurables en échelle linéaire, à moins de restreindre l'intervalle d'étude autour de ces valeurs, alors qu'en échelle logarithmique ils sont facilement repérables [11]. L'échelle logarithmique permet de bien distinguer les trois minima, pourtant séparés de presque 10 kHz.

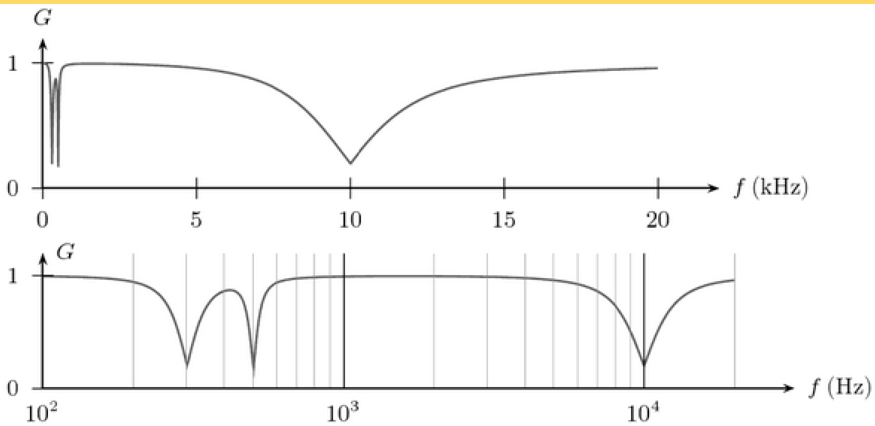


Fig. 8.9. Comparaison d'une même courbe de gain en échelles linéaire (en haut) et logarithmique (en bas).

L'illustration ci-dessus montre les deux types d'échelles :

- Avec l'échelle *linéaire*, deux graduations dont la **différence** vaut 10 sont à distance constante.
- Avec l'échelle *logarithmique*, deux graduations dont le **rapport** vaut 10 sont à distance constante.

Sur l'échelle logarithmique, les grands nombres sont comprimés, rapprochés de 1 et facilement représentés, en revanche les nombres inférieurs à 1 sont dilatés

<u>A retenir</u> :La perception sonore de l'oreille humaine est divisée par deux à chaque baisse de 3 dB.

<u>Rappels :</u> $\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}$ (x>0)

$\log(1)=0$

$\log(10)=1$

$\log(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\log(a)$

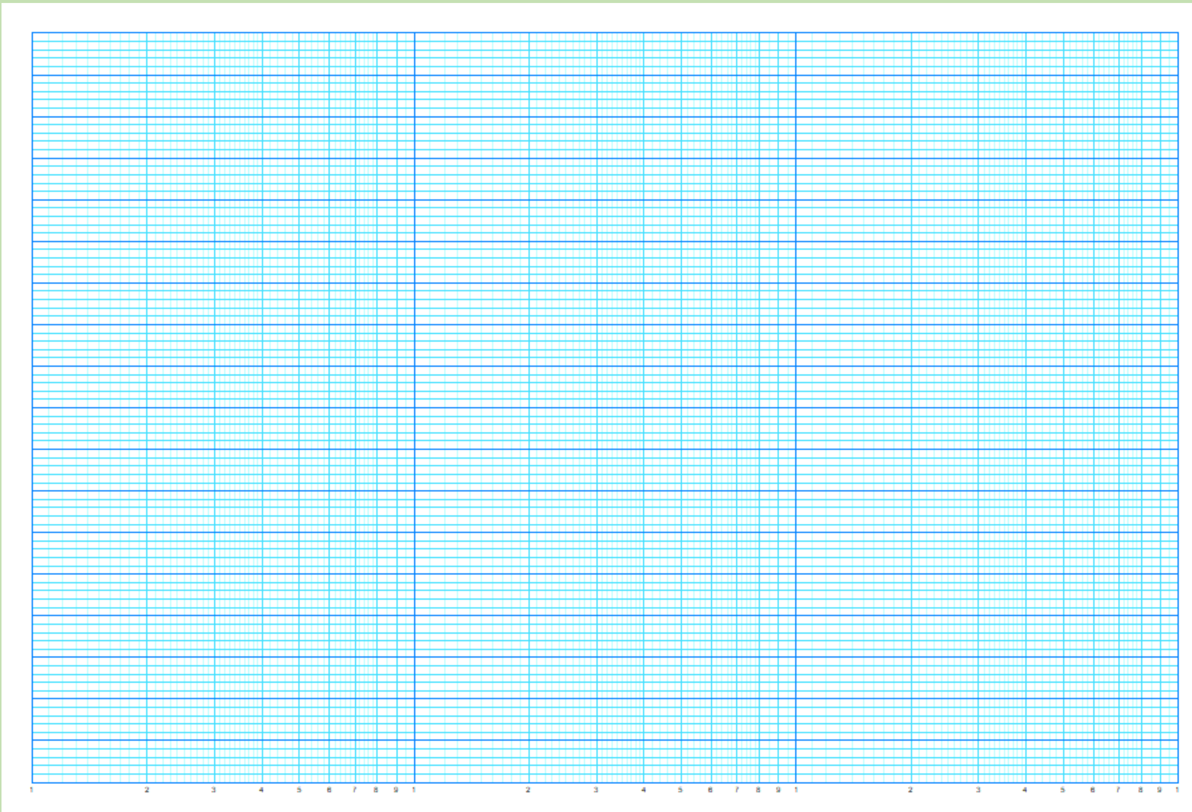
$\log(\frac{a}{b})=\log(a)-\log(b)$

<u>Représentation graphique de la fonction logarithme décimal</u> : f(x)=log(x)

1) Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	10	100	1000	10^5
log(x)					

2) Le graphique ci-dessous est repéré par une échelle semi-logarithmique (car l'axe des ordonnées est gradué de façon linéaire).
   Représenter les valeurs du tableau dans le repère ci-dessous. Que remarque-t-on ?
   La fonction log est-elle une fonction affine ?
   Tracer la représentation graphique de la fonction log sur le graphique ci-dessous.
3) Calculer (log2-log1) , (log20 – log10) , (log 200-log100)
   En déduire une propriété de l'échelle semi-logarithmique :
4) Grâce à la représentation graphique donner l'image de 20, celle de 300 puis l'antécédent de 2,5.
5) Vérifier les résultats obtenus dans la question 4) par le calcul.



10 10^2 10^3 10^4

Lien avec les mathématiques:

Exprimer le gain en fonction du rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$:

$$G = 20log|\underline{T}| = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1^2+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = -20\log\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Interprétation :

$$G = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Réaction du gain lorsque :

- Si ω est très faible devant ω_0 alors le rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$ est proche de 0 donc G est proche de $-10\log(1)$=0 dB
- Si ω = ω_0 alors G=$-10\log\left(1+\left(\frac{\omega_0}{\omega_0}\right)^2\right) = -10\log(2) \sim -3$ dB
- Si ω est très grande devant ω_0 alors le rapport $\frac{\omega}{\omega_0}$ est proche de ω et 1 est négligeable devant ω.

  Donc G est proche de $-10\log\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -20\log(\omega) + 20\log(\omega_0)$

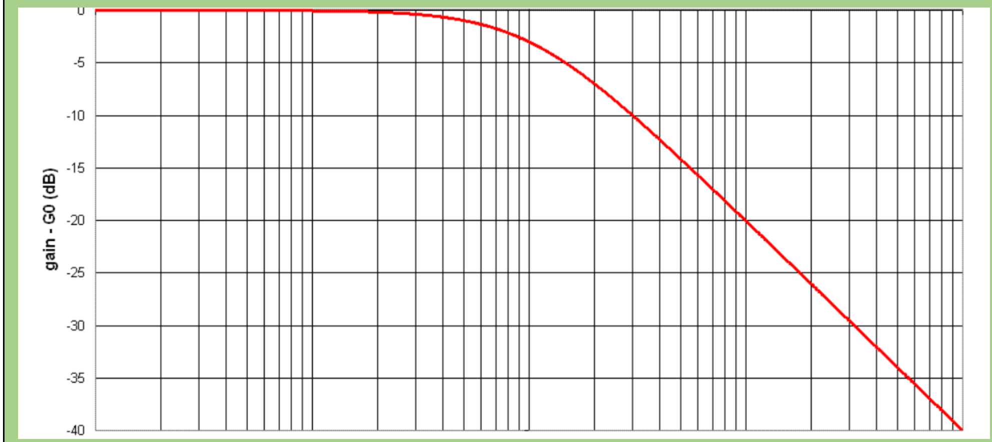
Asymptotes de la représentation graphique de G en fonction de $x = \omega$:

- Lorsque x tend vers -∞ (avec $x < \omega_0$) la représentation graphique du gain admet la droite d'équation : y=0 pour asymptote.
- Lorsque x tend vers +∞ (avec $x > \omega_0$) la représentation graphique du gain admet la courbe d'équation : y $= -20\log(x) + 20\log(\omega_0)$ pour asymptote.

Application : On considère le diagramme de Bode suivant représentant le Gain (en dB) :

$G(x) = -10\log\left(1+\left(\frac{x}{\omega_0}\right)^2\right)$ où x est une pulsation (rad /s)

pour une pulsation de coupure $\omega_0 = 10^4$ rad/s .



10^2 10^3 10^4 10^5 10^6 (rad/s)

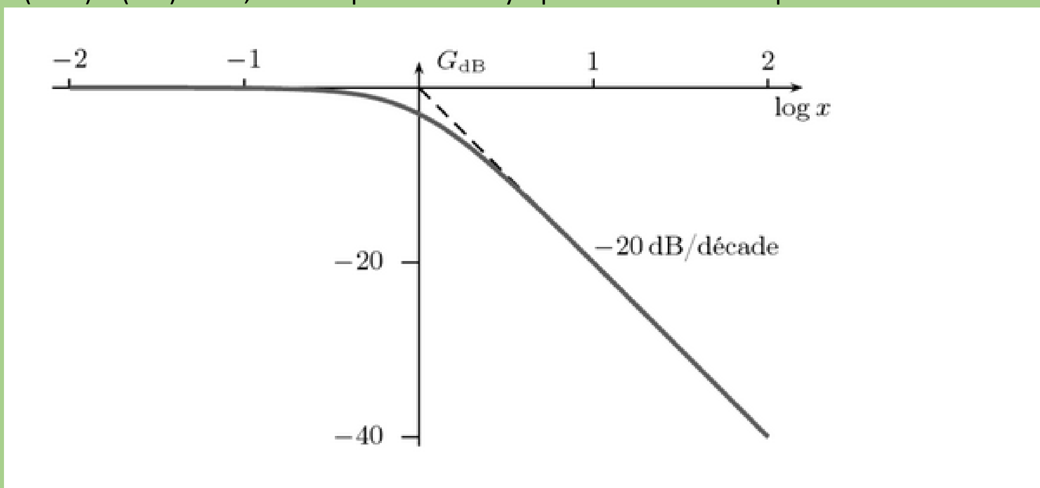
1) Grâce au graphique ci-dessus, compléter le tableau de valeurs suivant :

x (rad/s)	10^4		10^5	10^6
G(dB)		-10		

2) Vérifier les valeurs du tableau précédent par le calcul.

Remarque :

G(10^6)-G(10^5)= -20 , donc la pente de l'asymptote est de -20 dB par décade.



S'exercer à manipuler la fonction logarithme décimal :

https://www.youtube.com/watch?v=X59w0LuHLgQ