Intégration par parties

Introduction

L'*intégration par parties* est une propriété couramment utilisée dans le calcul d'intégrales car elle simplifie radicalement des expressions complexes.

Elle consiste à "jouer" avec les applications mises en jeu.

Formule d'intégration par parties

La formule de l'Intégration Par Parties est donnée par la relation suivante:

Théorème

Soient u et v deux fonctions dérivables, dont les dérivées sont continues.

$$\int_a^b u'.v = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'$$

Cette formule provient de **l'intégration de la formule de dérivation d'un produit**. : $(u.v)' = u'.v + u.v'$

$d'où\ u'.v = (u.v)' - u.v' et\ en\ intégrant\ alors :\ \int u'.v = \int (u.v)' - \int u.v'$ soit $\int u'.v = [u.v] - \int u.v'$

Exemple : $\int_0^1 x.e^x\,dx = \int_0^1 e^x.x\,dx$

- On choisit une fonction u telle que pour tout $x \in \mathbb{R}, u'(x) = e^x$ et on obtient $u(x) = e^x$
- On choisit une fonction v telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v(x) = x$ et on obtient $v'(x) = 1$

D'après la formule :

$$\int_a^b u'.v = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'$$

En reportant les fonctions :

$$\int_0^1 e^x.x\,dx = [e^x.x]_0^1 - \int_0^1 e^x.1\,dx$$

$$\int_0^1 e^x.x\,dx = [e^x.x]_0^1 - [e^x]_0^1$$

$$\int_0^1 e^x.x\,dx = [(e^1.1) - (e^0.0)] - [(e^1) - (e^0)]$$

$\int_0^1 e^x.x\,dx = [(e) - (0)] - [(e) - (1)]$ **d'où** $\int_0^1 e^x.x\,dx = 1$

EXERCICES :

$$\int_0^\pi x.cos(x)dx$$

$$\int_1^4 x.ln(x)dx$$

$$\int_{-1}^1 x^2.e^x\,dx$$