Programme de Terminale Bac Pro BOEN n° 8 du 25/02/2010 Productique – Maintenance - **Bâtiment** - Travaux publics Électricité - Électronique - Audiovisuel - Industries graphiques
S 1.1. Statistiques à 2 variables
S 1.2. Probabilités
A 2.1. Suites numériques 2
A 2.2. Fonctions dérivées et étude des variations d'une fonction
A 2.3. Fonctions exponentielles et logarithme népérien (Groupements A et B)
A 2.4. Fonctions exponentielles et logarithme décimal (Groupement C)
Programme complémentaire préparatoire aux Sections de Technicien Supérieur (BTS): Groupements A et B : Produit scalaire ; Nombres complexes ; Calcul intégral. *Groupement C: Primitives, Fonctions logarithme népérien, exponentielle base e*

I - La fonction **exponentielle**

1) Généralité

Définitions et théorème : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que**:** $\boldsymbol{f' = f \text{ et } f(0) = 1}$

On la nomme exponentielle et on la note $\boldsymbol{exp}$ ou $\boldsymbol{e}$ **(avec** $\boldsymbol{e = 2,72}$**)**.

Conséquences:

1) $\boldsymbol{e^0 = 1}$

2) e dérivable sur $\mathbb{R}$ $\boldsymbol{(exp(x))' = exp(x)}$

3) quel que soit $\boldsymbol{x}$ dans $\mathbb{R}$, $\boldsymbol{e^x > 0}$

4) $\boldsymbol{exp}$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$

- Si partout $\boldsymbol{(exp(x))' = exp(x)}$ et que $\boldsymbol{exp}$ est positive alors sa dérivée est elle aussi positive et exp est donc croissante et 2) et 3) implique 4)

2) Propriétés :

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$

$e^{a+b} = e^a \times e^b$

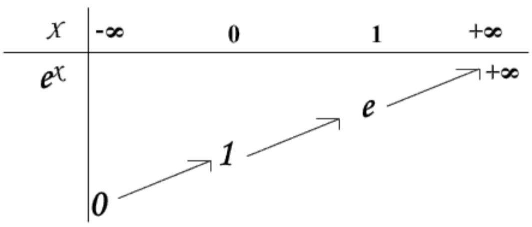
$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{-b} = \frac{1}{e^b}$$

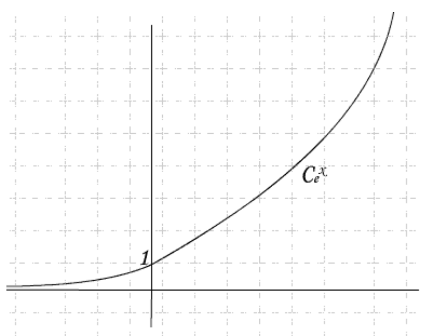
$e^{na} = (e^a)^n$ avec $n \in Z$

$$e^{\frac{a}{n}} = \sqrt[n]{e^a}$$

3) Tableau des variations



4) Courbe représentative

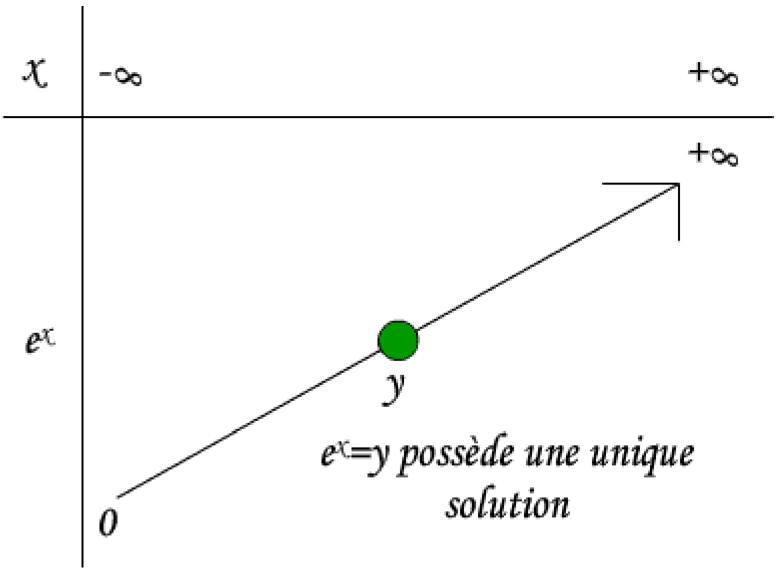


II - La fonction **logarithme** népérien

1) Définitions

f est une bijection de E dans F si f est une application telle que tout élément de F a un unique antécédant par f.
On note f^{-1} l'application de F dans E qui a un élément de f associe son antécédent par f.
On nomme f^{-1} la bijection réciproque de f (ou application réciproque).

Or nous savons que:
Exponentielle est strictement croissante et continue de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$



Tout élément de $]0;+\infty[$ a un unique antécédent dans $\mathbb{R}$
Donc e^x est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]0;+\infty[$

Définition:
La fonction logarithme népérien est la bijection réciproque de la fonction exponentielle.
On la note ln

2) Conséquences

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \rightarrow &]0;+\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightarrow & e^x = y & \rightarrow & ln\ y = x \end{array}$$

Ainsi:

$\forall x \in \mathbb{R} : \ (ln \circ exp)(x) = x$

$\forall x \in \mathbb{R} : \ ln(e^x) = x$

$\forall y \in]0;+\infty[: \ (exp \circ ln)(y) = y$

$\forall y \in]0;+\infty[: \ e^{ln\ x} = y$

3) Ensemble de définitions et valeurs

$$D_{ln} =]0;+\infty[$$

$$ln\ 1 = 0 \quad ln\ e = 1$$

$$ln\ \frac{1}{e} = -1$$

4) Propriétés algébriques et limites

Théorème: Pour tous réels a et b strictement positifs et tout entier relatif n on a:

$$\ln a * b = \ln a + \ln b$$
$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$
$$\ln a^n = n * \ln a$$
$$ln^n \sqrt{a} = \frac{1}{n} * \ln a$$

Théorème:

$$\lim_{x\to 0} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

5) Dérivée, variation, signe

La fonction ln est dérivable sur]0;+∞[et:

Corollaire: Soit une fonction dérivable sur son ensemble de définition et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ alors (ln o u) est dérivable et: ln est continue en 1:

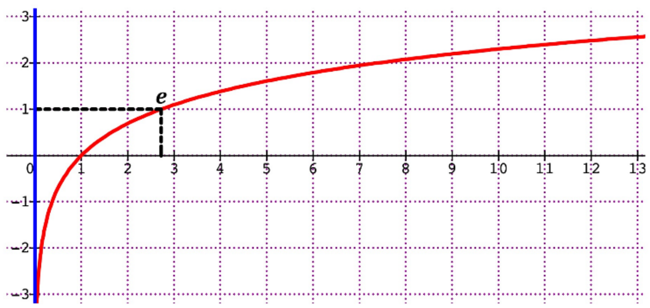
$$\forall\alpha > 0 \qquad e^{-\alpha} < 1 < e^{\alpha}$$

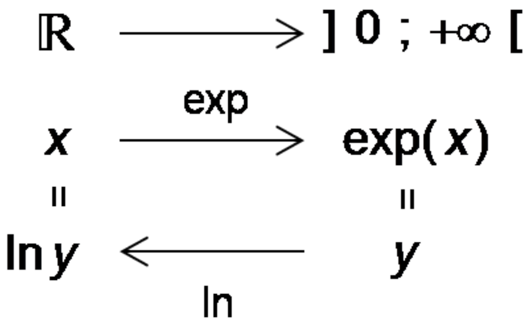
Et la fonction exponentielle est continue en 1, or:

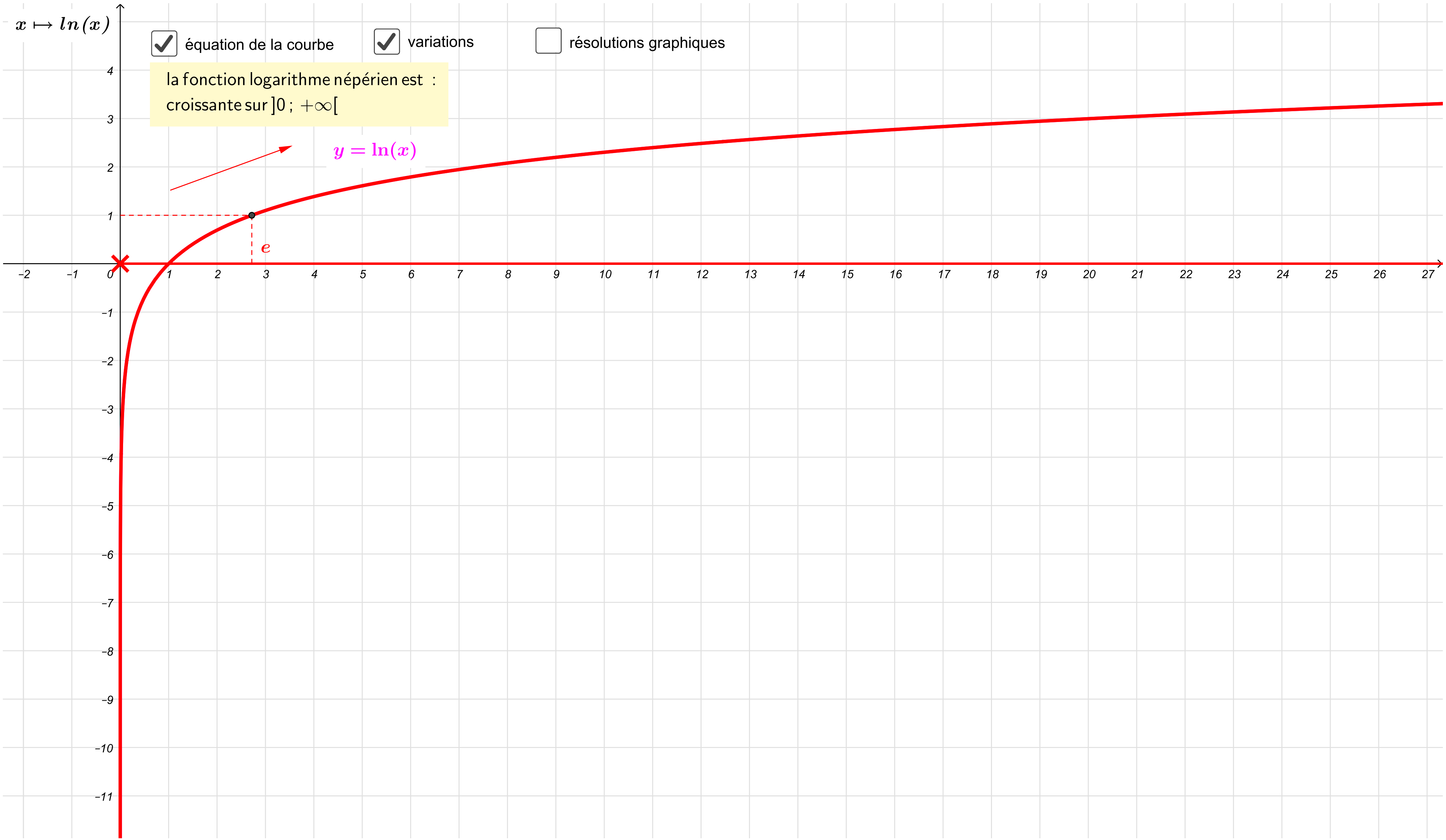
$$\forall\alpha > 0 \qquad -\alpha \leq \ln x \leq \alpha$$
$$\Leftrightarrow e^{-\alpha} \leq x \leq e^{\alpha}$$

Lorsque alpha tend vers 0 x tend vers 1 et donc ln(x) tend vers 0

Courbe de la fonction $x \mapsto \ln x$.







$x \mapsto ln(x)$
équation de la courbe
variations
résolutions graphiques
la fonction logarithme népérien est :
croissante sur $]0\,;\,+\infty[$
$y = \ln(x)$
e

CFA BTP 03
GROUPE : D04 TMEN 3TORGO

BACCALAUREAT PROFESSIONNEL

MATHÉMATIQUES

Page 4 sur 4

Exercices d'application

Source : Livre Maths T[le] BAC PRO Groupements A et B éditeur Hachette Technique (mars 2016)

Activité 3 page 68: **Utilisation du logarithme**

TICE : Installez GEOGEBRA version 5 sur votre ordinateur ou sur votre téléphone portable

Le chêne et … le logarithme népérien !

Dans des massifs forestiers de l'Ouest de la France, des relevés ont été effectués sur des chênes dont l'âge est compris entre 30 et 200 ans.
On obtient ainsi une bonne modélisation de la croissance de *Quercus robur* avec la fonction f définie par : $f(x) = 12{,}43 \ln x - 32{,}3$.
Dans cette expression x correspond à l'âge du chêne.
Selon ce modèle mathématique :

1. Quelle est la hauteur d'un chêne de 100 ans ?
2. Quel est l'âge d'un chêne mesurant 32 m ?

Source : Livre Maths T[le] BAC PRO Groupements A et B éditeur Hachette Technique (mars 2016)

Exercice 4 page 73 : Fonction logarithme népérien

4 a. Complétez le tableau suivant.

x	1	2	4	8	16	32	64
$\ln x$							

b. Identifiez la nature de la suite formée par les nombres de la première, puis par ceux de la deuxième ligne du tableau.

c. Précisez pour chaque suite sa raison.

d. Exprimez la raison de la suite arithmétique en fonction de la raison de la suite géométrique.