Suites numériques

I. Généralités sur les suites

1°. Définitions

On appelle suite, toute application d'une partie de $\mathbb{N}$ dans |R.

On note u_n l'image de n par la suite u. On note alors (u_n) ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cette suite et u_n ses termes.

Exemples *:*

• $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$ définie sur $\mathbb{N}$

on a $u_0 = 3; u_1 = \frac{5}{2}; u_2 = \frac{7}{3}...$

• $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$ définie sur $\mathbb{N}$

On obtient : $u_0 = 1; u_1 = -1; u_2 = -5; \ldots$

Remarques :

Une suite peut être définie par une relation du type $u_n = f(n)$: c'est le mode explicite (1° exemple) ; ou bien par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$ c'est le mode par récurrence (2° exemple).

2°. Suites géométriques

Définition :

Une suite est géométrique si, pour tout entier n : $\boxed{u_{n+1} = q\,u_n \quad (q \text{ réel}).}$

q est la **<u>raison</u>** de la suite.

Propriétés :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, on a :

• $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$

• $u_0 + u_1 + \cdots u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} = (\text{premier terme de la somme}) \times \dfrac{1-q^{(\text{nombre de termes de la somme})}}{1-q}$

Exemple *:*

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et telle que $u_0 = -15$. Calculer u_6 puis $S = u_6 + ... + u_{10}$.

3°. Suites arithmétiques

Définition :

Une suite est arithmétique si pour tout entier n : $\boxed{u_{n+1} = u_n + r \text{ (r réel)}}$.

r est la <u>raison</u> de la suite.

Propriétés :

- $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n-p)r$
- $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$

$$= (\text{nombre de termes de la somme}) \times \frac{(\text{premier terme de la somme}) + (\text{dernier terme de la somme})}{2}$$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -2 et telle que $u_1 = 10$. Calculer u_8 puis $S = u_1 + ... + u_8$.

4°. Variations d'une suite

Définition :

- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geq u_n$
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leq u_n$
- Une suite croissante ou décroissante est dite monotone.

Exemples :

❶ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n \end{cases}$.

Montrer que cette suite est croissante.

❷ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Montrer que cette suite est une suite géométrique décroissante. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \cdots u_n$

5°. Suites bornées

Définitions :

- On dit qu'une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel A tel que pour tout n on ait : $u_n \leq A$
- On dit qu'une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel B tel que pour tout n on ait : $u_n \geq B$
- Une suite est bornée si elle est à la fois minorée et majorée

Exemples :

❶ Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2n-1}{3n+2}$ est majorée par $\dfrac{2}{3}$.

❷ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n - 6}{u_n - 4}$.

Vérifier que la suite (u_n) est majorée par 2.

II. Suites convergentes

Etudier la convergence d'une suite, c'est étudier le comportement de son terme général u_n lorsque n devient très grand ; c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Dans la pratique tous les résultats valables pour la limite d'une fonction en $+\infty$ s'appliquent aussi à la limite des suites.

1°. Définitions

On dit qu'une suite (u_n) est <u>convergente</u> si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est un nombre réel.

Toute suite qui n'est pas convergente est dite <u>divergente</u>.

2°. Propriété : Suites de références convergeant vers 0

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0\ ;\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0\ ;\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0\ ;\ \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{b^n}=0\ (b>1)}$$

Exemple *:*

❶ Soit $u_n=3\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$. Etudier sa convergence.

❷ Soit $u_n=\dfrac{2n-1}{3n+2}$. Etudier sa convergence.

3°. Cas des suites monotones

Théorème :

Toute suite croissante et majorée converge Toute suite décroissante et minorée converge

Exemples *:*

Considérons la suite (u_n) telle que $u_0=0$ et $u_{n+1}=\dfrac{u_n-6}{u_n-4}$. Vérifier que cette suite est croissante puis montrer que cette suite converge.