A 2.1. Suites numériques 1

I. Suites arithmétiques

1. Définition

Définition On appelle **suite arithmétique** toute suite définie par un terme initial u_0 et une **relation de récurrence** de la forme :

$\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ où r est un **nombre réel** appelé la raison de la suite (u_n). **EX :** $\textit{Suite de nombres}$ **1, 3, 5, 7, .., 13,..**

Ici $r = +2$

Exemple 1. Pour chacune des suites (u_n) suivantes, montrer qu'elle est arithmétique et préciser sa raison.

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ *D'après la définition générale* $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ *J'identifie* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n + (4) \end{cases}$

$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n - 5 \end{cases}$ *D'après la définition générale* $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ *J'identifie* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + (-5) \end{cases}$

$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$ *D'après la définition générale* $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ *J'identifie* $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = u_n + (0) \end{cases}$

$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{1}{6} \end{cases}$ *D'après la définition générale* $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ *J'identifie* $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n + \left(-\frac{1}{6}\right) \end{cases}$

Exemple 2. On considère la suite arithmétique (u_n) de raison $r = 4$ et de terme initial $u_0 = 48$.

1. **Ecrire la relation de récurrence vérifiée par cette suite.**

D'après la définition générale $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ *J'identifie* $\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$

2. **Calculer u_1, u_2 et u_3.** Si n = 0 $\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_{0+1} = u_0 + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_{+1} = 48 + 4 = 52 \end{cases}$ d'où $u_{+1} = u_1 = 52$ $\boxed{u_1 = 52}$

$\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_{n+1} = u_n + 4 \end{cases}$ Si n = 1 $\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_{1+1} = \boxed{u_1} + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_2 = 52 + 4 = 56 \end{cases}$ Si n = 2 $\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_{2+1} = u_3 + 4 \end{cases}$ $\begin{cases} u_0 = 48 \\ u_3 = 56 + 4 = 60 \end{cases}$

Exemple 3. Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = {u_n}^2 \end{cases}$ Si n = 0 $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{0+1} = u_0^2 = 2^2 = 4 \end{cases}$ alors $u_1 = 4$

1. **Calculer u_1, u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ?** Si n = 0 $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{0+1} = u_0^2 = 2^2 = 4 \end{cases}$ alors $\boxed{u_1 = 4}$

Si n = 1 $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{1+1} = u_1^2 = 4^2 = 16 \end{cases}$ alors $\boxed{u_2 = 4^2} = 16$ d'où $(u_n) = \{4,\ 4^2,\ (4^2)^2, ..\ \}$

$u_0^2,\ u_1^2,\ u_2^2$

$n : 0,\ 1,\ 2$

2. Sens de variation

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

II. Suites géométriques

1. **Définition :** On appelle suite géométrique toute suite définie par un terme initial u_0 et une relation de récurrence de la forme :

$$\begin{cases} \boldsymbol{u_0} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n} \end{cases}$$

où $\boldsymbol{q}$ est un nombre réel appelé la **raison** de la suite.

Remarque : Au baccalauréat, on s'intéresse aux suites géométriques dont tous les termes sont positifs : c'est-à-dire les suites (u_n) géométriques telles que $\boldsymbol{u_0} > 0$ et $\boldsymbol{q} > 0$.

Exemple 1. **Pour chacune des suites (u_n) suivantes, montrer qu'elle est géométrique et préciser sa raison**.

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 4u_n \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{u_0} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 2} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = 4 \times u_n} \end{cases}$

$\begin{cases} u_0 = 2.5 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{u_0} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 2,5} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = 1 \times u_n} \end{cases}$

$\begin{cases} u_0 = 7 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{u_0} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n} \end{cases}$ $\begin{cases} \boldsymbol{u_0 = 7} \\ \boldsymbol{u_{n+1} = 1 \times u_n} \end{cases}$

FORMULAIRE

Suites arithmétiques

Définition : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$ et un premier terme. $\boldsymbol{r}$ ***est la raison*** Propriété : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n = contante}$ $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Terme général : $\boldsymbol{u_n = u_0 + n.r \quad ou\ u_n = u_p + (n-p).r}$

Somme des termes : $\boldsymbol{1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$

Somme des termes : $\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n}$

$$\boldsymbol{S_n = Nombre\ de\ termes\ .\ \frac{(Premier\ terme + dernier\ terme)}{2}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$$

Suites géométriques

Définition : $\boldsymbol{u_{n+1} = q.u_n}$ et un premier terme. $\boldsymbol{q}$ ***est la raison*** Propriété : $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} = contante}$ $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$

Terme général : $\boldsymbol{u_n = u_0.q^n \quad ou \quad u_n = u_p.q^{n-p}}$

Somme des termes : $\boldsymbol{1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

Somme des termes : $\boldsymbol{S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

$$\boldsymbol{S_n = Premier\ terme\ .\frac{(1 - q^{Nombre\ de\ termes})}{1-q}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$