PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS DU PLAN

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est le nombre réel noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$.
($\vec{u}\cdot\vec{v}$ se lit « vecteur $\vec{u}$ scalaire vecteur $\vec{v}$ ».)

I) Calculer le produit scalaire de deux vecteurs

Il faut utiliser l'une des expressions suivantes.

- Expression du produit scalaire en fonction des normes des vecteurs :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre : $\frac{1}{2}\left[\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right]$.

- Expression analytique du produit scalaire :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, de coordonnées (x; y) et (x'; y') dans un repère orthonormal, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre : $x\times x'+y\times y'$.

- Expression géométrique du produit scalaire :

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, formant un angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$, le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}$ est le nombre :

$$\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right).$$

Remarques : - si $\vec{u}\cdot\vec{v}>0$ alors l'angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est aigu.

- si $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$ alors l'angle $\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)$ est obtu.

- Le carré scalaire d'un vecteur est le carré de sa norme : $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=\left\|\vec{u}\right\|^2$.

II) Propriétés du produit scalaire

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ *et* $\vec{w}$ et pour tout nombre α réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}\quad;\quad\alpha\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}\quad;\quad\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

III) Montrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux

Si le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. ($\vec{u}\perp\vec{v}$).

IV) Application à la trigonométrie

$$\cos(a+b)=\cos(a)\times\cos(b)-\sin(a)\times\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\times\cos(b)+\sin(b)\times\cos(a)$$

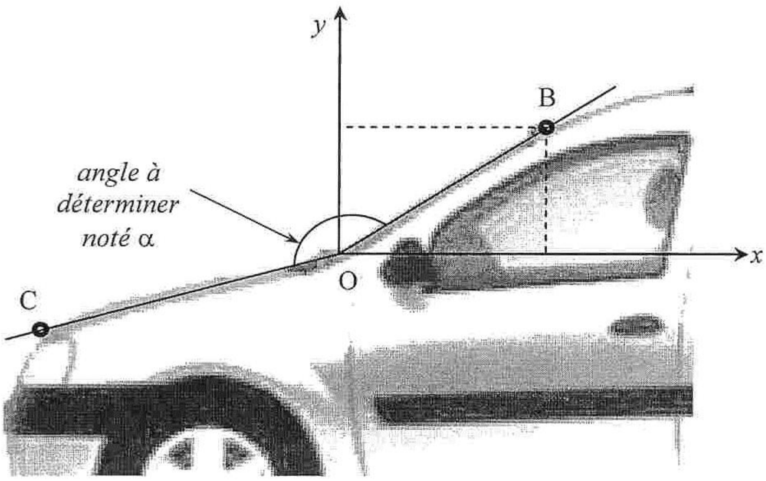
EVALUATION FORMATIVE

Capacités	**Questions**	A	EC	NA
Utiliser les trois expressions du produit scalaire de deux vecteurs pour déterminer des longueurs et des angles. Reconnaitre des vecteurs orthogonaux, à l'aide de leurs coordonnées dans un repère orthonormal.	**4**			

Connaissances	**Questions**	A	EC	NA
Définition du produit scalaire de deux vecteurs. Formules exprimant sin (*a* + *b*) et cos (*a* + *b*) en fonction de cos *a*, cos *b*, sin *a*, sin *b*. Propriétés du produit scalaire de deux vecteurs : $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$; $\alpha\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)=\alpha\vec{u}\cdot\vec{v}$; $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ Vecteurs orthogonaux.	**3 ; 4**			

Afin de réduire les pertes aérodynamiques, les concepteurs de véhicules s'imposent une contrainte : la mesure de l'angle « capot/pare-brise » doit être supérieure à 150°.

<u>Le but de cet exercice est de déterminer la mesure de cet angle pour le véhicule ci-contre</u>.



Remarques :
On considère que les points *C*, *O* et *B* sont dans le même plan vertical muni du repère orthonormal d'origine *O* et d'axes (*Ox*) et (*Oy*) (*voir figure ci-dessus*).

Dans le repère défini précédemment, les points *B* et *C* ont pour coordonnées :
B (67,9 ; 37) *C* (-92,7 ; -24,7)

1) **Déterminer** les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$.

2) **Calculer** les normes $\left\|\overrightarrow{OB}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{OC}\right\|$. Les résultats seront arrondis au centième.

3) **Calculer** le produit scalaire $\overrightarrow{OB}\ .\ \overrightarrow{OC}$.

4) **Calculer** cos α et en déduire une valeur de α arrondie au degré.

5) La contrainte imposée est-elle vérifiée ? **Justifier** la réponse.