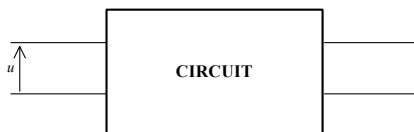


Exercice 6

PROPOSITION DE CORRECTION

Un circuit électrique est alimenté par une tension d'entrée u variant en fonction du temps t .



La fonction de transfert en régime sinusoïdal du circuit, constitué par une résistance de valeur $R = 1\,000\,\Omega$ et par un condensateur de capacité $C = 10^{-7}\,F$, a pour expression :

$$T = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

avec R en Ω , C en F et ω en rad/s .

j désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

1) Montrer que, pour $\omega = 2 \times 10^4 \text{ rad/s}$, l'expression de T peut s'écrire : $T = \frac{2j}{1+2j}$

Expression littérale :

$$T = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

Application numérique

$$T = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

$$T = \frac{2j}{1+2j}$$

Données numériques de l'énoncé :

$$R = 1000\,\Omega = 10^3\,\Omega$$

$$C = 10^{-7}\,F$$

$$\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$$

Calcul intermédiaire de : $RC\omega$

$$RC\omega = 10^3 \times 10^{-7} \times 2 \cdot 10^4$$

$$RC\omega = 10^{-4} \times 2 \cdot 10^4$$

$$RC\omega = 2$$

2) Calculer $(1+2j)(1-2j)$

On remarque z un nombre complexe $z = 1 + 2j$ de la forme $a + jb$

et $\bar{z}$ le nombre conjugué de z avec $\bar{z} = 1 - 2j$ de la forme $a - jb$

On sait que $|z| \times |\bar{z}| = a^2 + b^2$

avec ici $a = 1$ et $b = 2$ soit $a^2 = 1^2 = 1$ et $b^2 = 2^2 = 4$ d'où $|z| \times |\bar{z}| = 1^2 + 2^2 = 5$

On obtient : $|z| \times |\bar{z}| = (1+2j)(1-2j) = 1^2 + 2^2 = 5$

3) En utilisant le résultat précédent, montrer que $T = 0,8 + 0,4j$.)

On a : $T = \frac{2j}{1+2j}$ et on veut obtenir T de la forme $a + jb$

On multiplie le dénominateur et le numérateur par le nombre conjugué du dénominateur

$$T = \frac{2j}{1+2j} = \frac{2j \times (1-2j)}{(1+2j) \times (1-2j)} \quad \text{On a démontré précédemment que : } (1+2j)(1-2j) = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$d'où \quad T = \frac{2j \times (1-2j)}{5} = \frac{2j - 4j^2}{5} = \frac{2j - 4(-1)}{5} = \frac{2j + 4}{5} = \frac{4 + 2j}{5}$$

$$T = \frac{4}{5} + \frac{2j}{5} = 0,8 + 0,4j$$

4) Calculer le module du nombre complexe T . Le résultat sera arrondi au millièm.

$$T = \frac{4}{5} + \frac{2j}{5}$$

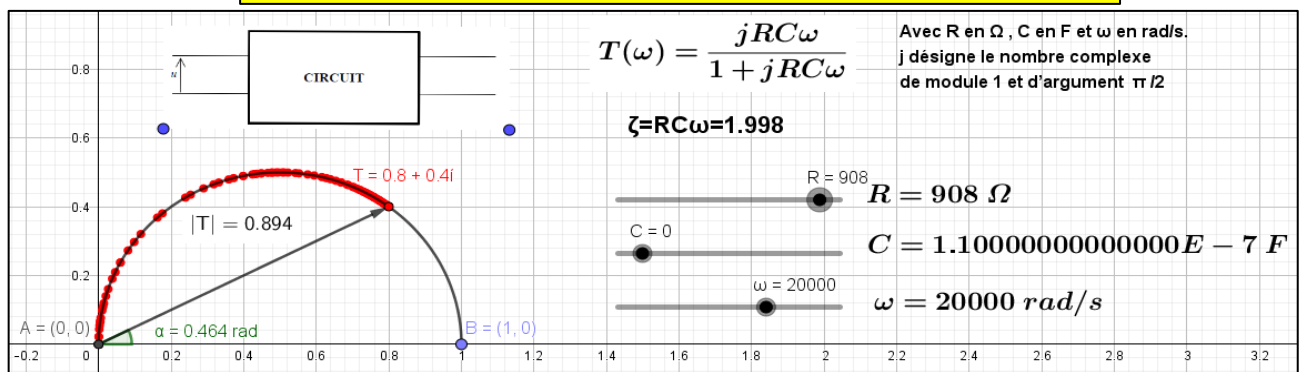
$$T = 0,8 + 0,4j \quad d'où \quad |T| = \sqrt{0,8^2 + 0,4^2} = 0,894$$

5) Calculer un argument du nombre complexe T . Le résultat sera arrondi au centième de radian.

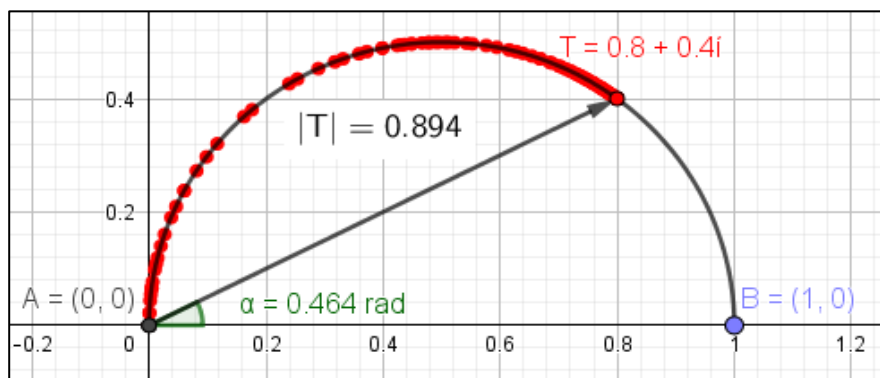
$$T = \frac{4}{5} + \frac{2j}{5} \quad d'où \quad \tan(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0,500$$

A l'aide d'une calculatrice $\text{Arctan}(\alpha) = \text{ou } \tan^{-1}(\alpha) \text{ ou } \alpha = 0,4634 \text{ rad}$

Modélisation avec logiciel de géométrie dynamique : GEOGEBRA V5



Avec Outils de modélisation



Par le calcul

Forme algébrique de T

$$T = 0,8 + 0,4j$$

Module de T

$$|T| = 0,894$$

Argument α de T

$$\alpha = 0,4634 \text{ rad}$$