NOMBRES COMPLEXES

Table des matières

I Introduction **2**
I.1 Le nombre i . . . 2
I.2 L'ensemble des nombres complexes . . . 2

II Forme algébrique **3**
II.1 Définition . . . 3
II.2 Premiers calculs . . . 3
II.3 Représentation graphique . . . 4
II.4 Conjugué d'un complexe . . . 5
II.5 Inverse d'un complexe . . . 6

III Forme trigonométrique **6**
III.1 Module d'un nombre complexe . . . 6
III.2 Argument d'un complexe non nul . . . 7
III.3 Écriture trigonométrique . . . 8

IV Forme exponentielle **9**
IV.1 Définitions . . . 9
IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle . . . 9

V Formules de MOIVRE et d'EULER **10**
V.1 Formule de MOIVRE . . . 10
V.2 Formules d'EULER . . . 10

VI Lignes de niveau **11**

VII Équations du second degré **12**

Les chemins de la création mathématique sont imprévisibles et résultent parfois d'audacieuses transgressions des règles et savoirs établis.

Le simple fait d'avoir introduit dans les calculs un symbole pour désigner des racines carrées de nombres négatifs a conduit au fil des siècles à élaborer la puissante théorie des nombres complexes.

I Introduction

Tous les nombres positifs ont une racine carrée. Par exemple, 9 a pour racines carrées 3 et -3.
Par contre, aucun réel négatif n'a de racine carrée (réelle).
Les nombres complexes offrent la possibilité de pallier à cette injustice !

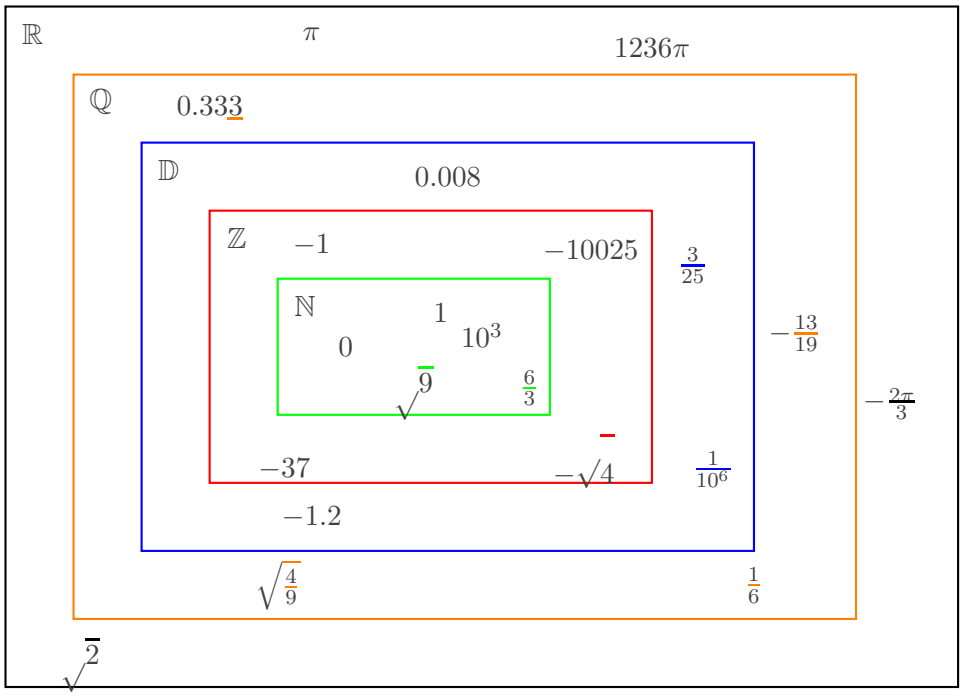
I.1 Le nombre i

Le nombre i est un nombre dont le carré vaut -1. Ainsi, $i^2 = -1$.
De plus, son opposé $-i$ a aussi pour carré -1. En effet : $(-i)^2 = i^2 = -1$.
Les deux racines de -1 sont les deux nombres réels i et $-i$.

Un peu d'histoire : La notation i fut introduite par **Euler** en 1777, puis reprise par **Gauss** au début du XIXème siècle. Cependant, le premier à parler de nombre imaginaire fut le très cartésien **Descartes** en 1637.

I.2 L'ensemble des nombres complexes

On connait déjà 5 ensembles permettant de "ranger" les nombres : il s'agit de $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{D}, \mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$:



Définition 1
On définit l'ensemble $\mathbb{C}$ qui a les caractéristiques suivantes :

- *Ses éléments sont appelés nombres complexes,*
- *Il contient le nombre i vérifiant $i^2 = -1$.*

Remarque 1
$\mathbb{C}$ est alors un ensemble encore plus grand que tous les autres, et on a : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

II Forme algébrique

II.1 Définition

Définition 2
Chaque élément z de l'ensemble $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique $z = a + ib$, a et b étant des réels.

- *a est appelé partie réelle de z et est noté $\mathfrak{Re}(z)$,*
- *b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathfrak{Im}(z)$.*

Remarque 2
Nombres particuliers :
- si $b = 0$, on a $z = a$, z est donc réel,
- si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un imaginaire pur.

Exemple 1
Dans chacun des exemples suivants, on donne la partie réelle et la partie imaginaire :

$z = 2 + 3i$	$a = 2$	$b = 3$
$z = -1 + \frac{1}{2}i$	$a = -1$	$b = \frac{1}{2}$
$z = -i$	$a = 0$	$b = -1$
$z = \pi$	$a = \pi$	$b = 0$
$z = 4i - \frac{1}{3}$	$a = -\frac{1}{3}$	$b = 4$.

Propriété 1
Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad a + ib = a' + ib' \quad \Leftrightarrow \quad a = a' \text{ et } b = b'.$$

II.2 Premiers calculs

Propriété 2
On pose $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et k un réel, on a :
- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,
- $z - z' = (a - a') + i(b - b')$,
- $kz = ka + ikb$,
- $zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Démonstration de la dernière propriété :

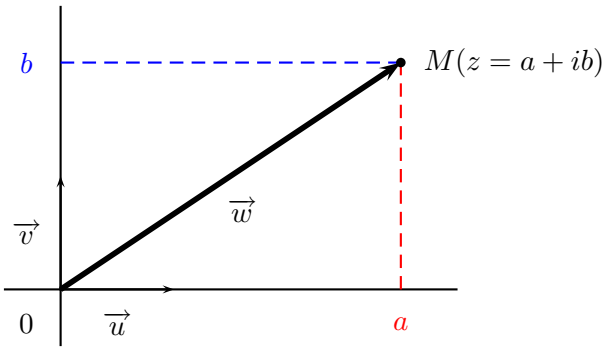
$$\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + ia'b + i^2bb' \\ &= aa' + iab' + ia'b - bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b). \end{aligned}$$

- $z + z' = 2 + 3i + i - 5 = -3 + 4i$,
- $z - z' = 2 + 3i - (i - 5) = 2 + 3i - i + 5 = 7 + 2i$,
- $2z - 3z' = 2(2 + 3i) - 3(i - 5) = 4 + 6i - 3i + 15 = 19 + 3i$,
- $zz' = (2 + 3i)(i - 5) = 2i - 10 + 3i^2 - 15i = 2i - 10 - 3 - 15i = -13 - 13i$,
- $z^2 = (2 + 3i)^2 = 2^2 + 2 \times 2 \times 3i + (3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i$.

II.3 Représentation graphique

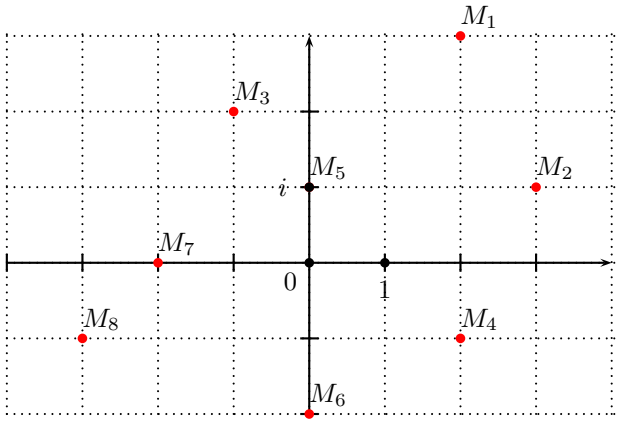
Définition 3
On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- *Au point M de coordonnées $(a; b)$ on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$,*
  On dit que $z = a + ib$ est l'affixe du point M.
- *Au vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a; b)$ on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$,*
  On dit que $z = a + ib$ est l'affixe du vecteur $\vec{w}$.
- *Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormal direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.*



Exemple 3
On place dans le plan complexe les points M_i d'affixes z_i :

- $z_1 = 2 + 3i$
- $z_2 = 3 + i$
- $z_3 = -1 + 2i$
- $z_4 = 2 - i$
- $z_5 = i$
- $z_6 = -2i$
- $z_7 = -2$
- $z_8 = -i - 3$



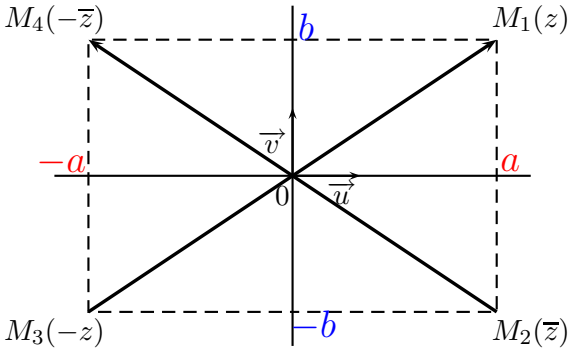
Propriété 3
Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, alors :

- Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + i(b' - b)$,
- $||\overrightarrow{OM}|| = \sqrt{a^2 + b^2}$,
- $||\overrightarrow{MM'}|| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$,
- Le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \dfrac{z + z'}{2}$.

II.4 Conjugué d'un complexe

Définition 4
On appelle conjugué du nombre complexe $z = a + ib$ le nombre $\overline{z} = a - ib$.

Géométriquement, si M_1 est le point d'affixe z, le point M_2 d'affixe $\overline{z}$ est le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des abscisses.



Exemple 4
Soit $z = 3 + 5i$ et $z' = -2 + 3i$, on a :

- $z + z' = (3 + 5i) + (-2 + 3i) = 1 + 8i$,
  $z \times z' = (3 + 5i) \times (-2 + 3i) = -6 + 9i - 10i + 15i^2 = -6 - i - 15 = -21 - i$.
- $\overline{z} = 3 - 5i$,
  $\overline{z'} = -2 - 3i$.
- $\overline{z} + \overline{z'} = (3 - 5i) + (-2 - 3i) = 1 - 8i$,
  $\overline{z + z'} = 1 - 8i$.
- $\overline{z} \times \overline{z'} = (3 - 5i) \times (-2 - 3i) = -6 - 9i + 10i + 15i^2 = -6 + i - 15 = -21 + i$,
  $\overline{z \times z'} = -21 + i$.

Propriété 4
Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.
- $\overline{\overline{z}} = z$.
- $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.
- $\mathfrak{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$.
- $\mathfrak{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$.

II.5 Inverse d'un complexe

Soit $z = a + ib$, on a : $z\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$ qui est un nombre réel.

Ainsi, on a :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}.$$

Exemple 5
Calculs d'inverses :

- $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{1-i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i.$
- $\dfrac{1}{2-3i} = \dfrac{2+3i}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{2+3i}{13} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}i.$
- $\dfrac{2}{i} = \dfrac{2\times -i}{i\times -i} = \dfrac{-2i}{1} = -2i.$
- $\dfrac{2+i}{-3+i} = \dfrac{(2+i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} = \dfrac{-6-2i-3i+1}{10} = \dfrac{-5-5i}{10} = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i.$

Propriété 5
Soit z et z' deux nombres complexes, alors :

- $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}.$
- $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}.$

III Forme trigonométrique

III.1 Module d'un nombre complexe

Définition 5
Le module du complexe z est le réel positif noté $|z|$ tel que $|z| = \sqrt{z\,\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$.

Remarque 3
Si a est un réel, $|a| = \sqrt{a\ \overline{a}} = \sqrt{a\,a} = \sqrt{a^2}$ car $\overline{a} = a$.
La notion de module dans $\mathbb{C}$ généralise donc celle de valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Exemple 6
Calcul du module de nombres complexes :

- $|3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$
- $|1-i| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$
- $|-5-2i| = \sqrt{(-5)^2+(-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}.$
- $|-5| = 5.$
- $|9i| = \sqrt{0^2+9^2} = \sqrt{81} = 9.$

Propriété 6

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$.
- $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

III.2 Argument d'un complexe non nul

Définition 6

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z :

- *On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})[2\pi]$,*
- *On note $\theta = \arg(z)$,*
- *θ vérifie :* $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$

Exemple 7

Calcul d'un argument de nombres complexes :

- $z_1 = 2 + 2i$: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+2^2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+2^2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$ $\Rightarrow \arg(2+2i) = \dfrac{\pi}{4}$.

- $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$: $\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$ $\Rightarrow \arg(1+\sqrt{3}i) = \dfrac{\pi}{3}$.

Propriété 7

Propriétés algébriques des arguments :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\,[2\pi]$.
- $\arg(\dfrac{1}{z}) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z)\,[2\pi]$.
- $\arg(\dfrac{z}{z'}) = \arg(z) - \arg(z')\,[2\pi]$.

Exemple 8
D'après l'exemple précédent, on obtient :

- $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{12}$.
- $\arg\left(\dfrac{1}{z_1}\right) = -\arg z_1 = -\dfrac{\pi}{4}$.
- $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{12}$.

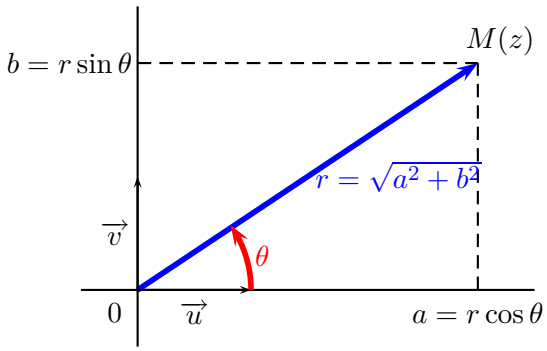
III.3 Écriture trigonométrique

On se place dans un plan muni du repère $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

Définition 7
Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec :

- $\arg(z) = \theta \in \mathbb{R}$ *est l'argument de* z
- $|z| = r \in \mathbb{R}_*^+$ *est le module de* z

cette écriture s'appelle la forme trigonométrique de z.



Pour trouver la forme trigonométrique d'un nombre z, il faut donc calculer successivement le module et l'argument de z.

Exemple 9
Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :

- $z_1 = 1 - i$: $\begin{cases} |1+i| &= \sqrt{2} \\ \cos\theta &= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta &= -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow r = \sqrt{2}$ et $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$ $\Rightarrow 1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.
- $z_2 = \sqrt{3} + i$: $\begin{cases} |\sqrt{3}+i| &= 2 \\ \cos\theta &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta &= \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ $\Rightarrow \sqrt{3} + i = 2\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$.

Remarque 4
Dans certains cas, il est inutile de faire tous les calculs : la forme trigonométrique se "voit" :

- $1 = \cos 0 + i\sin 0$ donc $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0$.
- $i = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ donc $|i| = 1$ et $\arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$.

IV Forme exponentielle

IV.1 Définitions

Définition 8
Pour tout nombre réel θ, on pose : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Remarque 5
- Il existe une fonction appelée fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Mais ici, $i\theta$ est un nombre complexe et la fonction $\theta \longmapsto e^{i\theta}$ n'est pas au programme de terminale.
- $e^1 = e$ est un nombre qui a pour valeur approchée $2,718$.

Définition 9
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul de module $r = |z|$ et dont un argument est $\theta = arg(z)$.
On note ce nombre z sous la forme $z = r\,e^{i\theta}$.
Cette écriture est appelée notation exponentielle de z.

Remarque 6
On a alors $z = r\,e^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\cos\theta + ir\sin\theta = a + ib$..

Exemple 10
Différentes écritures des nombres complexes z_1 et z_2 :

Forme algébrique	Forme trigonométrique	Forme exponentielle
$1 - i$	$\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$	$\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$
$\sqrt{3} + i$	$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$	$2\,e^{i\frac{\pi}{6}}$

Exemple 11
Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique de $z = 4\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$:
- $z = 4\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
- $z = 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
- $z = -2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$.

IV.2 Règles de calcul en notation exponentielle

Remarque 7
Pour les calculs du type "somme" ou "différence", on utilisera la forme algébrique.
On préférera la forme exponentielle pour les calculs de produits ou de quotients.

Propriété 8
Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, tous $r, r' \in \mathbb{R}_*^+$, tout $n \in \mathbb{N}$:

- $r\,e^{i\theta} \times r'\,e^{i\theta'} = rr'\,e^{i(\theta+\theta')}$.
- $\left(r\,e^{i\theta}\right)^n = r^n\,e^{in\theta}$.
- $\dfrac{r\,e^{i\theta}}{r'\,e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$.

Exemple 12
Soit $z_1 = 2\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}}$:

- $z_1 z_2 = 2 \times 2\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)} = 4\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{2}}$.
- $z_2^4 = \left(2\sqrt{3}\right)^4\,e^{i4\frac{\pi}{6}} = 144\,e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
- $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

V Formules de MOIVRE et d'EULER

V.1 Formule de MOIVRE

Propriété 9
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Un peu d'histoire : Abraham de MOIVRE 1667-1754 est un mathématicien britannique d'origine française.

Exemple 13
Factorisation de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$:

- On a d'une part : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos(2\theta) + i\sin(2\theta)$ d'après la formule de MOIVRE,
- et d'autre part : $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$ par développement,
- d'où : $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- et $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$.

V.2 Formules d'EULER

Propriété 10
Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad$ et $\quad \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Un peu d'histoire : Leonhard EULER $(1717 - 1783)$ était un mathématicien et physicien suisse.

Exemple 14
Linéarisation de $\sin^2 x$:

- $\sin^2 x = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \dfrac{e^{2ix} - 2\,e^{ix}\,e^{-ix} + e^{-2ix}}{-4} = \dfrac{-2 + e^{2ix} + e^{-2ix}}{-4} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2}\right)$,
- donc : $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$.

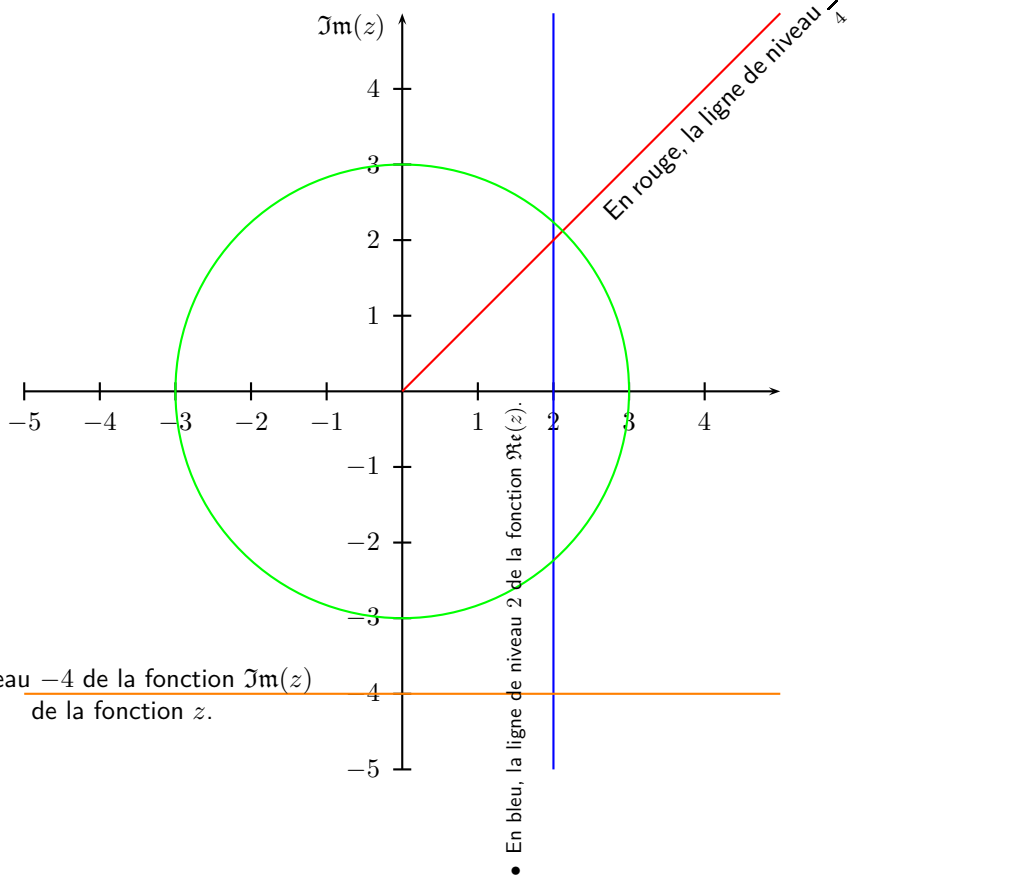
VI Lignes de niveau

Définition 10
Dans un repère orthonormal $(O;\vec{u};\vec{v})$, la ligne de niveau k d'une fonction f est l'ensemble des points d'affixe z tels que $f(z)=k$.

Les principales lignes de niveau dans $\mathbb{C}$ sont :

- La ligne de niveau k de la fonction $\boxed{z \longmapsto \mathfrak{Re}(z)}$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z dont la partie réelle est k, c'est à dire la droite d'équation $x=k$.
- La ligne de niveau k de la fonction $\boxed{z \longmapsto \mathfrak{Im}(z)}$ est l'ensemble des points M du plan d'affixe z dont la partie imaginaire est k, c'est à dire la droite d'équation $y=k$.
- La ligne de niveau k (positif) de la fonction $\boxed{z \longmapsto |z-a|}$ est le cercle de centre A d'affixe a et de rayon k.
- La ligne de niveau k de la fonction $\boxed{z \longmapsto \arg(z-a)}$ est la demi-droite d'origine A d'affixe a d'angle k par rapport à $(O,\vec{u})$.

Exemple 15
On construit les lignes de niveau suivantes :
- En bleu, la ligne de niveau 2 de la fonction $\mathfrak{Re}(z)$.
- En orange, la ligne de niveau -4 de la fonction $\mathfrak{Im}(z)$
- En vert, la ligne de niveau 3 de la fonction z.
- En rouge, la ligne de niveau $\frac{\pi}{4}$ de la fonction $\arg(z)$.



En orange, la ligne de niveau -4 de la fonction $\mathfrak{Im}(z)$
En vert, la ligne de niveau de la fonction z.

VII Équations du second degré

Propriété 11
Soit $az^2+bz+c=0$ une équation du second degré où $a;b;c\in\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$.
On pose $\Delta=b^2-4ac$.

- Si $\Delta>0$, l'équation du second degré admet deux solutions réelles distinctes :

$$z_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta=0$, l'équation du second degré admet une unique solution réelle :

$$z_0=\frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta<0$, l'équation du second degré admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 16
Résolution dans $\mathbb{C}$ de $z^2-2z+2=0$:

- $\Delta=b^2-4ac=-4=(2i)^2$.
- Le discriminant étant négatif, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
- $z_1=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{2+2i}{2}=1+i$ et $z_2=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}=\dfrac{2-2i}{2}=1-i$.

Résolution dans $\mathbb{C}$ de $z^2+6z+9=0$:

- $\Delta=b^2-4ac=0$.
- Le discriminant étant nul, l'équation admet une solution double :
- $z_0=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-6}{2}=-3$.

Résolution dans $\mathbb{C}$ de $z^2+2z-3=0$:

- $\Delta=b^2-4ac=16=4^2$.
- Le discriminant étant positif, l'équation admet deux solutions réelles :
- $z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2+4}{2}=1$ et $z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-2-4}{2}=-3$.